VIŠEKRITERIJUMSKO PROGAMIRANJE

Već sam naziv – višekriterijumsko programiranje – pokazuje da se u ovom slučaju vrši optimiziranje po više kriterijuma, odnosno u modelu se nalazi dve ili više funkcija kriterijuma. Funkcija kriterijuma kao jedan od sastavnih delova ekonomsko-matematičkog modela obuhvata obeležje po kojem razmatrani sistem treba da dostigne svoj optimum. Nameće se pitanje da li je potrebno istovremeno obuhvatiti više ciljeva u jednom modelu, i ako je odgovor potvrdan, koje ciljeve, i kako ih treba uzeti u obzir. Kao i celom postupku modeliranja, izboru funkcije kriterijuma treba posvetiti posebnu pažnju. Mnogobrojni su argumenti koji govore u prilog činjenici da su potrebna istraživanja u vezi sa funkcijom kriterijuma. Pre svega, u upravljanju i procesima donošenja odluka potrebno je da postoji obeležje kojim se može meriti i izraziti efikasnost donete odluke. Sastavni deo procesa donošenja odluka najčešće predstavlja i izbor između više ciljeva, njihovo usklađivanje, postavljanje rang liste ciljeva po važnosti i utvrđivanje dinamike njihovog ostvarenja. Po savremenom shvatanju višekriterijalnosti, među datim ciljevima skoro uvek postoji jedan koji je glavni, najvažniji, koji se može smatrati strategijskim. S druge strane, pošto preduzeće najčešće ima organizacione jedinice, zatim, pripada složenijem privrednom i regionalnom sistemu, a pored čisto ekonomskih mora da uvažava i druge kriteriijume odlučivanja, proizilazi da uvek može da postoji sistem simultanih, istovremenih ciljeva jednake važnosti, od kojih su neki saglasni, a drugi kontradiktorni međusobno.

Model višekriterijumskog programiranja je definisan na sledeći način:

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,...,n \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij} \leq b_i, \quad i=1,2,...,m \qquad \text{(b)} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j = z_k \rightarrow \max, \quad k=1,2,...,r \qquad \text{(c)}$$

Definisano je r ciljeva $z_1, z_2, ..., z_r$:

$$
\begin{aligned}
c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n &= z_1 \rightarrow \max \\
c_{21}\cdot x_1 + c_{22}\cdot x_2 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n &= z_2 \rightarrow \max \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
c_{r1}\cdot x_1 + c_{r2}\cdot x_2 + \ldots + c_{rn}\cdot x_n &= z_r \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

Model (1) u matričnom obliku glasi:

$$
\begin{aligned}
&\underline{x} \geq \underline{0} \\
&\underline{A}\cdot\underline{x} \leq \underline{b} \\
&\underline{C}\cdot\underline{x} = \underline{z} \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

gde je $\underline{C}$ kriterijumska matrica a $\underline{z}$ vektor vrednosti funkcija kriterijuma. Definisani ciljevi z_k mogu biti saglasni ili neusaglašeni, odnosno suprotni sa stanovišta određivanja optimalnog rešenja, zatim, koeficijenti c_{kj} su različitog sadržaja i različitih redova veličine u pojedinim funkcijama kriterijuma. Pored čisto računsko-tehničkih poteškoća postoje i drugi problemi formulisanja, rešavanja i interpretacije modela i rešenja problema višekriterijumskog programiranja.

Uvedimo sledeće osnovne pojmove u vezi sa višekriterijumskim programiranjem:

- ***skup mogućih rešenja*** $\mathbf{M}$ je skup onih rešenja (vektora $\underline{x}$) koja zadovoljavaju uslov o nenegativnosti i sistem ograničavajućih uslova:

  $$\mathbf{M} = \{\underline{x} \mid \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{Ax} \leq \underline{b}\}$$

- ***kriterijumski skup*** K je skup vektora vrednosti funkcija kriterijuma $\underline{z}$ koji su pridruženi svakom elementu iz $\mathbf{M}$, tj. svakom mogućem rešenju:

  $$K = \{\underline{z} = z(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbf{M}\}$$

- ***savršeno (maksimalno) rešenje*** $\underline{x}^s$ je ono rešenje za koje sve funkcije kriterijuma dostižu ekstremnu vrednost, i kažemo da $\underline{x}^s$ dominira nad svim ostalim rešenjima:

  $$\underline{x}^s \in \mathbf{M},\ f(\underline{x}^s) \geq f(\underline{x})$$

- ***ideal*** $\underline{z}^i$ je vektor ekstremnih vrednosti koje pojedine funkcije kriterijuma pojedinačno mogu dostići u skupu mogućih rešenja:

  $$\underline{z}^i = [z_{1,\max},\ z_{2,\max},\ \ldots,\ z_{r,\max}]$$

  ako je $\underline{z}^i \in K$, tada postoji $\underline{x}^s \in \mathbf{M}$;

- ***efikasno rešenje*** $\underline{x}^e$ je ono moguće rešenje za koje ne postoji ni jedno drugo rešenje $\underline{x}^b$ koje bi bilo bolje po jednoj a ne bi bilo gore po ostalim funkcijama kriterijuma:

  $$\{\underline{x}^b \in \mathbf{M} \mid (\forall k,\ z_k(\underline{x}^b) \geq z_k(\underline{x}^e)),\ (\exists k,\ z_k(\underline{x}^b) > z_k(\underline{x}^e))\} = \varnothing$$

- ***kompromisno (preferirano, najbolje) rešenje*** je ono rešenje koje se iz skupa efikasnih rešenja bira kao konačno rešenje.

Praktični problemi rešavanja formulisanog modela višekriterijumskog programiranja se mogu svesti na sledeće:

- formiranje (beskonačnog) skupa efikasnih rešenja
- formiranje podskupa efikasnih rešenja
- generisanje jednog kompromisnog rešenja, za što nije neophodno poznavanje kompletnog skupa efikasnih rešenja; u okviru ove grupe pitanja posebno mesto zauzimaju modeli ciljnog programiranja

5.1. MODELI SA PREFERENCIJOM CILJEVA

Ako postoji stroga preferencija ciljeva, tada se vrši optimizacija po najvažnijem cilju, tj. onom koji je prvi po rangu. Ako u ovom slučaju ne postoji alternativno rešenje, tada se jedino optimalno rešenje dobijeno po prvom cilju prihvata kao konačno kompromisno rešenje. Ako postoji alternativno optimalno rešenje po prvom cilju, tada se vrši optimiranje po cilju drugom po rangu, tj. od alternativnih optimalnih rešenja prvog cilja bira se ono koje je najbolje po drugom cilju. U slučaju postojanja alternativnih optimalnih rešenja i po drugom cilju optimizacija se vrši dalje po cilju trećem po rangu, itd. Primenom ovog algoritma problem višekriterijumskog se rešava postupcima jednokriterijumskog programiranja, a dobijeno konačno rešenje je sigurno jedno od efikasnih rešenja.

PRIMER 94. U jednom pogonu planira se proizvodnja tri tipa proizvoda (P_1, P_2, P_3). Dnevni kapacitet pogona je 9 časova, a za jedinicu proizvoda potrebno je angažovati, redom, 1 čas, 1 čas odnosno 2 časa kapaciteta pogona. Dnevno se u pogonu može preraditi najviše 30 jedinica osnovne sirovine, koja se troši za jedinicu proizvoda u količini od 2 jedinice, 3 jedinice odnosno 4 jedinice, respektivno. Ukupna dnevna proizvodnja treba da iznosi najmanje 8 jedinica svih proizvoda zajedno. Prodajne cene po jedinici proizvoda su, redom, 6 novčanih jedinica, 4 n.j i 2 n.j. Odredite optimalni program proizvodnje, ako su postavljena dva cilja:

- maksimalna dnevna proizvodnja, kao cilj prvog ranga, i
- maksimalni prihod, kao cilj drugog ranga!

R 94. Model sa preferencijom ciljeva:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = z_1 \rightarrow \max \quad \text{(cilj prvog ranga)}$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = z_2 \rightarrow \max \quad \text{(cilj drugog ranga)}$$

Prvo se određuje optimalno rešenje po prvom cilju:

	x_1	x_2	x_3	d_3^*	
d_1	1	1	2	0	9
d_2	2	3	4	0	30
v_3	1	**(1)**	1	−1	8
z_1	1	1	1	0	0

z_2	6	4	2	0	0
	x_1	v_3	x_3	d_3^*	
d_1	0		1	**(1)**	1
d_2	−1		−1	3	6
x_2	1		1	−1	8
z_1	0		0	1	−8
z_2	2		−2	4	−32
	x_1	v_3	x_3	d_1	
d_3^*	0		1	1	1
d_2	−1		−2	−3	3
x_2	**(1)**		2	1	9
z_1	0		−1	−1	−9
z_2	2		2	4	−36

Poslednja tabela sadrži rešenje koje je optimalno po prvoj funkciji kriterijuma, $x_1=0$, $x_2=9$, $x_3=0$, $z_{1,max}=9$. Za ovo rešenje vrednost druge funkcije kriterijuma je $z_2=36$, koje nije optimalno. Prema prvoj funkciji kriterijuma postoji alternativno rešenje; nula u redu z_1 i koloni x_1 omogućuje poboljšanje programa i po drugoj funkciji kriterijuma, jer se nalazi pozitivna vrednost u redu z_2 i koloni x_1: $2 > 0$. Nakon izvršene iteracije po označenom ishodnom elementu sledi:

	x_2	v_3	x_3	d_1	
d_3^*	0		1	1	1
d_2	1		0	−2	12
x_1	1		2	1	9
z_1	0		−1	−1	−9
z_2	−2		−6	−6	−54

Dobijeno rešenje je optimalno po obe funkcije kriterijuma, $x_1=9$, $x_2=0$, $x_3=0$, $z_{1,max}=9$, $z_{2,max}=54$. Na ovaj način, dobijeno je savršeno rešenje $\underline{x}^s=[9,0,0]$ u skupu mogućih rešenja, kojem odgovara ideal $\underline{z}^i = [9,54]$ u kriterijumskom skupu.

PRIMER 95. U jednoj fabrici proizvode se proizvodi A, B, C, D i E. U sledećoj tabeli dati su podaci o kapacitetima mašina M_1, M_2 i M_3 (u časovima) za dati vremenski interval, tehnički koeficijenti (utrošak mašinskih časova po jedinici proizvoda) prihod (u novčanim jedinicama po jedinici proizvoda) i masa proizvoda (u kg po jednici proizvoda):

Proizvod Mašina	A	B	C	D	E	Kapacitet
M_1	1	0	1	1	0	50
M_2	2	4	2	0	2	200
M_3	0	2	2	2	2	160

Prihod	4	6	6	4	4	
Masa	2	2	8	4	6	

Odredite optimalan proizvodni program uz strogu preferenciju ciljeva! Cilj prvog ranga je maksimalni prihod, a drugog minimalna ukupna masa proizvoda.

R 95. Promenljive x_j, $j=1,...,5$ su količine proizvoda redom A, B, C, D i E. Model:

x_1,, x_2, x_3, x_4, $x_5 \geq 0$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & \leq & 50 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & + & 2x_5 & \leq & 200 \\
 & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 160 \\
4x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 4x_5 & = & z_1 \rightarrow \max \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & + & 6x_5 & = & z_2 \rightarrow \min
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
d_1	1	0	**(1)**	1	0	50
d_2	2	4	2	0	2	200
d_3	0	2	2	2	2	160
z_1	4	6	6	4	4	0
z_2	-2	-2	-8	-4	-6	0

	x_1	x_2	d_1	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	1	0	50
d_2	0	**(4)**	-2	-0	2	100
d_3	-2	2	-2	0	2	60
z_1	-2	6	-6	-2	4	-300
z_2	6	-2	8	4	-6	400

	x_1	d_2	d_1	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	1	0	50
x_2	0	1/4	-1/2	-1/2	1/2	25
d_3	-2	-1/2	-1	**(1)**	1	10
z_1	-2	-3/2	-3	1	1	-450
z_2	6	1/2	7	3	-5	450

	x_1	d_2	d_1	d_3	x_5	
x_3	**(3)**	1/2	2	-1	-1	40
x_2	-1	0	-1	1/2	1	30
x_4	-2	-1/2	-1	1	1	10
z_1	0	-1	-2	-1	0	-460
z_2	12	2	10	-3	-8	420

Rešenje koje je optimalno po prvoj funkciji kriterijuma je:

$x_1=0$, $x_2=30$, $x_3=40$, $x_4=10$, $x_5=0$, $z_{1,max}=460$, $z_2=420$

Postoji alternativno optimalno rešenje po prvoj funkciji kriterijuma, za koje se može izvršiti poboljšanje po drugoj funkciji kriterijuma:

	x_3	d_2	d_1	d_3	x_5	
x_1	1/3	1/6	2/3	-1/3	-1/3	40/3
x_2	1/3	-1/6	-1/3	1/6	2/3	130/3
x_4	2/3	-1/6	1/3	1/3	1/3	110/3

z_1	0	-1	-2	-1	0	-460
z_2	-4	0	2	1	-4	260

Dobijeno rešenje je optimalno po prvom kriterijumu, ali nije i po drugom. Program je poboljšan po drugoj funkciji kriterijuma, međutim ne postoje dalje mogućnosti poboljšanja tako da se ne pogorša rezultat po prvoj funkciji kriterijuma. Pošto je prvi kriterijum višeg ranga u odnosu na drugi, dobijeno rešenje se prihvata kao konačno kompromisno rešenje. Rešenje se čita i analizira na uobičajeni način.

5.2. SKUP MOGUĆIH REŠENJA, SKUP EFIKASNIH REŠENJA, KRITERIJUMSKI SKUP

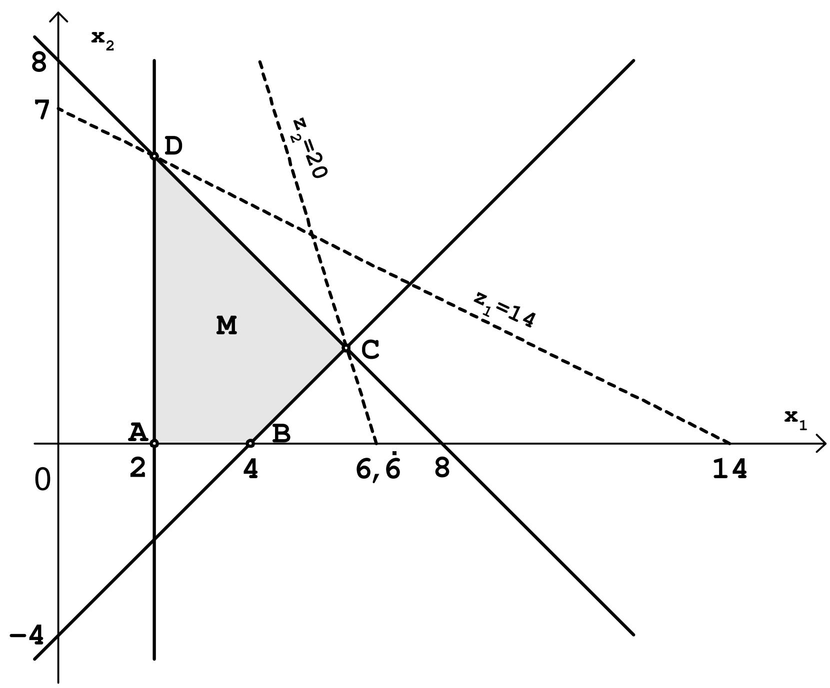
PRIMER 96. U sledećem višekriterijumskom modelu odredite grafički skup mogućih rešenja, kriterijumski skup, skup efikasnih rešenja i ideal!

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_1 + 2x_2 = z_1 \rightarrow \max$$
$$3x_1 + x_2 = z_2 \rightarrow \max$$

R 96.

Slika 32.

Skup mogućih rešenja



M - skup mogućih rešenja

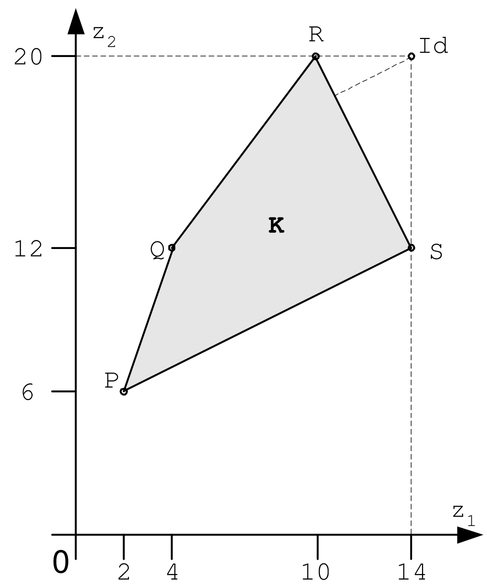
D(2,6) - optimalno rešenje po prvom cilju, $z_{1,max} = 14$

C(6,2) - optimalno rešenje po drugom cilju, $z_{2,max} = 20$

Tačke duži CD - skup efikasnih rešenja
Podaci za preslikavanje skupa **M** u skup **K**:

Ekstremne tačke skupa **M**	Koordinate x_1	Koordinate x_2	Koordinate z_1	Koordinate z_2	Ekstremne tačke skupa **K**
A	2	0	2	6	P
B	4	0	4	12	Q
C	6	2	10	20	R
D	2	6	14	12	S

Slika 33.
Kriterijumski skup i ideal



K - kriterijumski skup; ekstremne tačke su određene smenom koordinata ekstremnih tačaka **M** u z_1 i z_2: A → P, B → Q, C → R, D → S.
Tačke duži RS - vrednosti funkcija kriterijuma z_1 i z_2 koje odgovaraju efikasnim rešenjima.
Id - ideal, skup individualnih ekstremnih vrednosti dve funkcije kriterijuma.

PRIMER 97. U sledećem višekriterijumskom modelu:

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_2 \le 3$$
$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{2}{10}x_2 = z_1 \rightarrow \max$$
$$10x_1 - 5x_2 = z_2 \rightarrow \max$$

1. a) Utvrdite i analizirajte skup mogućih rešenja!

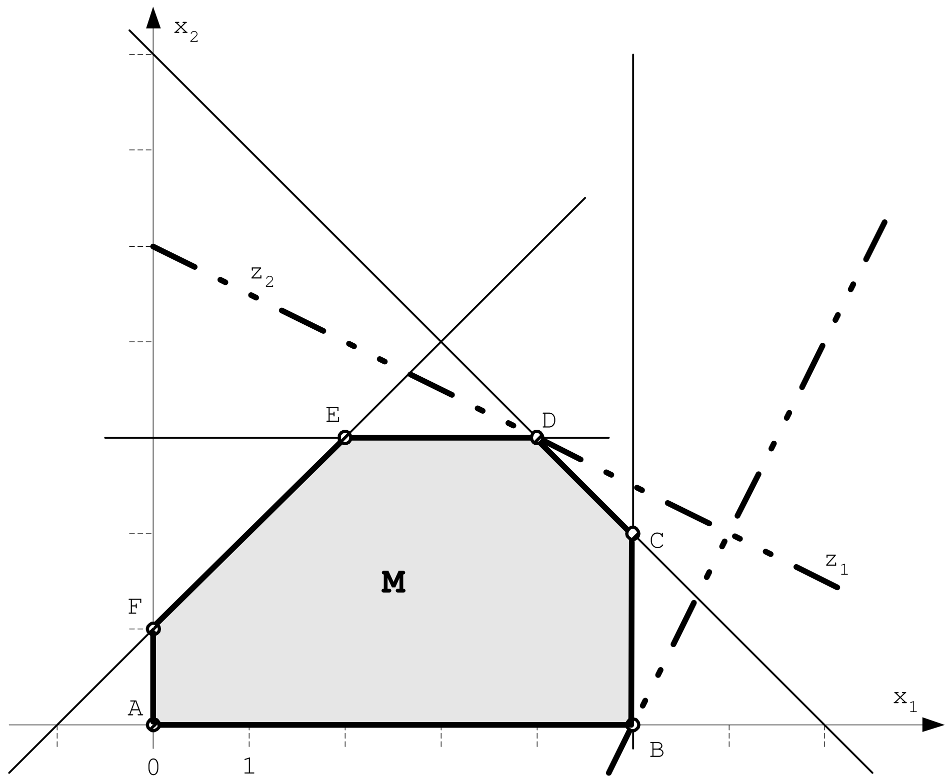
b) Utvrdite skup efikasnih rešenja!
c) Odredite kriterijumski skup i ideal!

2. Odredite efikasna bazna rešenja!

R 97.1. a) Skup mogućih rešenja je prikazan na sledećem grafikonu

Slika 34.

Skup mogućih rešenja i novo linije



- Skup **M** ima beskonačno mnogo elemenata
- Skup **M** je konveksni poliedar
- Skup **M** ima 6 ekstremnih tačaka
- Skup **M** je dvodimenzionalan
- Skup **M** nije simpleks

b) Vrednosti funkcija kriterijuma z_1 i z_2 u ekstremnim tačkama skupa **M** sadržane su u sledećoj tabeli:

Ekstremne tačke skupa **M**	x_1	x_2	z_1	z_2	Ekstremne tačke kriterijumskog skupa
A	0	0	0	0	A′
B	5	0	1/2	50 (max)	B′
C	5	2	9/10	40	C′
D	4	3	1 (max)	25	D′
E	2	3	8/10	5	E′
F	0	1	2/10	−5	F′

Skup efikasnih rešenja obuhvata tačke izlomljene duži `BCD`

Ideal je skup ekstremnih vrednosti funkcija kriterijuma `Id(1,50)`

c) Kriterijumski skup i ideal su prikazani na sledećem grafikonu

Slika 35.

Kriterijumski skup i ideal