4.

NELINEARNO PROGAMIRANJE

4.3. HIPERBOLIČNO PROGRAMIRANJE

O hiperboličnom programiranju govorimo tada, kada se pri linearnim ograničavajućim uslovima traži maksimum racionalno razlomljene funkcije, sa linearnim brojiocem i imeniocem, čiji je dijagram hiperbola ako se radi o funkciji jedne promenljive. Model hiperboličnog programiranja se može definisati na sledeći način:

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad (1)$$

$$\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b} \qquad (2)$$

$$\frac{\underline{c}^T\underline{x} + \alpha}{\underline{k}^T\underline{x} + \beta} = z \rightarrow \max \qquad (3)$$

U gornjem modelu α i β su slobodni članovi, tj. početne vrednosti koje mogu biti jednake nuli, $\underline{k}^T$ je vektor jediničnih efekata (npr. troškovi po jedinici proizvodnje), dok ostali simboli imaju ranije navedena značenja. Sa gledišta praktične primene, celishodno je u odnosu na model (1)-(3) postaviti sledeća dva zahteva:

- skup mogućih rešenja $M = \{\underline{x} \mid \underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}, \ \underline{x} \geq \underline{0}\}$ mora biti neprazan i ograničen i
- imenilac funkcije kriterijuma mora biti pozitivan, funkcija kriterijuma je neprekidna u skupu M.

Gornja definicija modela programiranja se daje npr. kada se želi maksimizirati jedan od ekonomskih pokazatelja uspešnosti poslovanja (ekonomičnosti kao odnosa ukupnih prihoda prema ukupnim troškovima, produktivnosti kao odnosa obima proizvodnje prema uloženom radu, renatbilnosti kao odnosa dohotka prema angažovanim sredstvima i sl.), ili neki drugi pokazatelji. Model hiperboličnog programiranja se može rešiti primenom simpleks metoda, što povećava njegov značaj sa stanovišta praktične primene. Matematičar B. Martoš je razradio jednu mogućnost primene simpleks algoritma za rešavanje hiperboličnog modela i utvrdio je kriterijum optimalnosti koji se zasniva na opštoj teoriji ekstremne vrednosti razlomljene funkcije sa više argumenata.

Polazna simpleks tabela je:

	$\underline{x}^T$	
$\underline{d}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
z_1	$\underline{c}^T$	$-\alpha$
z_2	$\underline{k}^T$	$-\beta$
z_3	$\beta\underline{c}^T - \alpha\underline{k}^T$	z_1/z_2

Ishodni elemenat se bira u početnoj, odnosno transformisanoj matrici $\underline{A}$ prema sledećem kriterijumu:

- u koloni koja odgovara najvećoj efikasnosti (pozitivnoj vrednosti) u tzv. kriterijumskom redu z_3, a u redu koji daje najmanji količnik elemenata desne strane $\underline{b}$ i elemenata izabrane kolone.

Bazna transformacija se vrši na uobičajeni način za sve elemente tabele, sem za red z_3, za koji se vrednosti računaju po formuli datoj u gornjoj simpleks tabeli, u svakom koraku prema aktuelnim podacima.

Kriterijumi optimalnosti su sledeći:

- nenegativnost elemenata u (transformisanoj) koloni, tj. $\underline{b}' \geq \underline{0}$
- nepozitivnost elemanata u (transformisanom) kriterijumskom redu z_3, tj. $\beta'\underline{c}'^T - \alpha'\underline{k}'^T \leq \underline{0}^T$
- baza bez veštačkih promenljivih (kolone veštačkih promenljivih nije potrebno računati)

Ekstremna vrednost funkcije kriterijuma je z_1/z_2.

PRIMER 92. U jednoj fabrici proizvode se proizvodi P_1, P_2 i P_3. Podaci potrebni za programiranje obuhvaćeni su sledećom tabelom:

Proizvod i	Prodajna cena (din/kom.)	Direktni troškovi (din/kom.)	Tehnički koeficijenti (čas/kom.) M A [I N E A			
			A	B	C	D
P_1	200	100	2	5	4	8
P_2	100	50	2	1	2	0
P_3	300	200	2	2	2	4
		Kapaciteti mašina (čas)	6000	6000	8000	8000

Fiksni troškovi su 100000 dinara. Kapacitet mašine A treba iskoristiti u potpunosti. Utvrdite optimalni program uz maksimalnu ekonomičnost!

R 92. Neka je x_i broj komada proizvoda P_i, i=1,2,3. Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6000$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6000$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8000$$
$$8x_1 + 4x_3 \leq 8000$$
$$\frac{200x_1 + 100x_2 + 300x_3}{100x_1 + 50x_2 + 200x_3 + 1000000} = z \rightarrow \max$$

```
max= (20*x1+100*x2+300*x3)/(100*x1+50*x2+200*x3+100000);
2*x1+2*x2+2*x3=6000;
5*x1+x2+2*x3<6000;
4*x1+2*x2+2*x3<8000;
8*x1+4*x3<8000;
End
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              1.272727
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               5
  Best multistart solution found at step:              1
  Total solver iterations:                            24
  Elapsed runtime seconds:                          0.68

  Model Class:                                       NLP

  Total variables:                     3
  Nonlinear variables:                 3
  Integer variables:                   0
```

```
 Total constraints:                    5
 Nonlinear constraints:                1

 Total nonzeros:                      14
 Nonlinear nonzeros:                   3


Variable           Value        Reduced Cost
       X1        0.000000          0.2611570E-03
       X2        1000.000           0.000000
       X3        2000.000         -0.1652893E-04

Row    Slack or Surplus      Dual Price
 1        1.272727            1.000000
 2        0.000000           0.3305785E-04
 3        1000.000            0.000000
 4        2000.000            0.000000
 5        0.000000            0.000000
```

PRIMER 93. Tehnološki uslovi proizvodnje tri vrste tekstila (T_1, T_2 i T_3), kao i uslovi prodaje su sledeći:

a) Tkaninu T_1 naručilo je pet kupaca u količinama, redom, 100 m, 50 m, 200 m, 70 m i 80 m. Porudžbinama nije obavezno udovoljiti, ali veće količine nije moguće realizovati na tržištu.

b) Obim proizvodnje T_2 može biti najviše za 200 m veći od obima proizvodnje T_1.

c) Svi tekstili prolaze obradu na postrojenjima P_1 i P_2.

Tehnički koeficijenti (čas/metar) i kapaciteti (časovi rada) dati su sledećom tabelom:

Postrojenja	P R O I Z V O D I T_1	T_2	T_3	Kapaciteti
P_1	15	5	10	8000
P_2	10	10	20	14000

d) Proporcionalni troškovi proizvodnje su, redom, 12 din, 9 din i 12 din po metru tkanine, a fiksni troškovi iznose 18000 din.

e) Prodajne cene po metru tekstila su, redom, 120 din, 90 din i 60 din.

Odredite optimalni asortiman proizvodnje uz maksimalnu ekonomičnost!

R 93. Neka je x_j broj proizvedenih metara tkanine T_j, j=1,2,3.
Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$15x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 8000$$
$$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 14000$$
$$-x_1 + x_2 \leq 200$$
$$x_1 \leq 500$$
$$\frac{120x_1 + 90x_2 + 60x_3}{12x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 18000} = z \to \max$$

```
max= (120*x1+90*x2+60*x3)/(12*x1+9*x2+12*x3+18000);
15*x1+5*x2+10*x3<=8000;
10*x1+10*x2+20*x3<=14000;
-x1+x2<=200;
x1<=500;
end
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              3.370166
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               5
  Best multistart solution found at step:              1
  Total solver iterations:                            25
  Elapsed runtime seconds:                          0.31

  Model Class:                                       NLP

  Total variables:                      3
  Nonlinear variables:                  3
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                    5
  Nonlinear constraints:                1

  Total nonzeros:                      12
  Nonlinear nonzeros:                   3


Variable           Value        Reduced Cost
       X1        350.0000            0.000000
```

```
      X2        550.0000            0.000000
      X3        0.000000           0.1843656E-02

Row     Slack or Surplus       Dual Price
 1         3.370166             1.000000
 2         0.000000           0.2564024E-03
 3         5000.000             0.000000
 4         0.000000           0.9157230E-03
 5         150.0000             0.000000
```

Optimalno rešenje: $x_1=350$, $x_2=550$, $x_3=0$, $E_{max}=3,370$

Analiza rešenja: Fabrika treba da proizvodi 350 m tekstila T_1 i 550 m tekstila T_2. Maksimalna ekonomičnost je 3,370. Kupci dobijaju za 150 m manje tekstila T_1 nego što su naručili. Kapacitet P_1 se koristi 100%, a na P_2 je neiskorišćeno 5000 časova.

PRIMER 94. Jedna fabrika mašinogradnje proizvodi dva tipa fabričkog postrojenja P_1 i P_2. Proizvodnja se odvija pod sledećim uslovima:

a) Kapacitet grupa mašina je 1000 časova, treba ga 100% iskoristiti, a za obradu postrojenja angažuje se po 10 časova za P_1, odnosno 5 časova za P_2.

b) Kapacitet trake za montažu postrojenja je 3000 časova, dok se za jedno postrojenje angažuje 10 časova za P_1 i 30 časova za P_2.

c) Prodaja je ograničena najviše na 90 komada P_1 i 60 komada P_2.

Odredite optimalni program proizvodnje uz maksimalnu ekonomičnost, ako su prodajne cene 50000 din za P_1 i 60000 din za P_2, fiksni troškovi 20000 din, proporcionalni troškovi su po 10000 din za komad oba postrojenja!

R 94. Neka je x_1 broj postrojenja P_1 a x_2 broj postrojenja P_2. Model:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$
$$10x_1 + 5x_2 = 1000$$
$$10x_1 + 30x_2 \leq 3000$$
$$x_1 \leq 90$$
$$x_2 \leq 60$$
$$\frac{50000x_1 + 60000x_2}{10000x_1 + 10000x_2 + 20000} = z \to \max$$

```
max= (50000*x1+60000*x2)/(10000*x1+10000*x2+20000);
10*x1+5*x2=1000;
```

```
10*x1+30*x2<=3000;
x1<=90;
x2<=60;
end
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                                    5.378788
  Infeasibilities:                                    0.000000
  Extended solver steps:                                     5
  Best multistart solution found at step:                    1
  Total solver iterations:                                  21
  Elapsed runtime seconds:                                0.77

  Model Class:                                             NLP

  Total variables:                        2
  Nonlinear variables:                    2
  Integer variables:                      0

  Total constraints:                      5
  Nonlinear constraints:                  1

  Total nonzeros:                         8
  Nonlinear nonzeros:                     2


Variable           Value        Reduced Cost
    X1        70.00000           0.000000
    X2        60.00000        -0.6140955E-02

Row    Slack or Surplus      Dual Price
 1        5.378788            1.000000
 2        0.000000          -0.2869605E-03
 3        500.0000            0.000000
 4        20.00000            0.000000
 5        0.000000            0.000000
```

4.4. ZADACI ZA VEŽBE

17. ZADATAK

U jednoj fabrici potrebno je odrediti godišnji program proizvodnje, koji obezbeđuje maksimalnu ekonomičnost. Program treba odrediti u uslovima ograničenosti kapaciteta mašine, raspoloživih sirovina i obima moguće realizacije. Navedeni podaci i tehnički koeficijenti dati su u sledećoj tabel:

IZVORI ENERGIJE	PRIZVODI			KAPACITETI
	A_1	A_2	A_3	
Mašina M	3 čas/kom.	1 čas/kom.	2 čas/kom.	2200 čas/god.
Sirovina S	5/2 kg/kom.	1 kg/kom.	4 kg/kom.	1950 čas/god.
Donji limit plasmana	500 kom.	100 kom.	100 kom.	
Gornji limit plasmana	600 kom.	600 kom.	250 kom.	

Poznati su još sledeći podaci:
Proporcionalni troškovi po proizvodima su redom: 20, 10 odnosno 20 novčanih jedinica po komadu. Fiksni troškovi iznose 50000 novčanih jedinica. Prodajne cene jednog komada proizvoda su 200, 350 i 250 novčanih jedinica, respektivno.
Odredite optimalni program proizvodnje uz gornje uslove!

18. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi 4 artikala pod sledećim uslovima:

	A R T I K L I				KAPACITETI
	A_1	A_2	A_3	A_4	
SIROVINA (kg/kom.)	10	6	12	2	364 kg
MAŠINE (čas/kom.)	20	2	12	4	320 čas
Donji limit plasmana (kom.)	-	30	10	20	
Gornji limit plasmana (kom.)	70	40	20	50	
Prodajne cene (n.j./kom.)	1000	1000	500	700	
Proporcionalni troškovi (n.j./kom.)	500	100	150	150	

1. Utvrdite optimalni plan proizvodnje uz maksimalnu ekonomičnost ako fiksni troškovi iznose 13000 novčanih jedinica!

2. Navedite model ciljnog programiranja, hiperboličnog programiranja i standardni problem maksimuma!

19. ZADATAK

Dati su sledeći podaci za jednu fabriku, za koju treba sastaviti optimalni program proizvodnje koji obezbeđuje maksimalnu ekonomičnost:

Proizvodi	Prodajna cena (din/kom.)	Direktni troškovi (din/kom.)	Tehnički koeficijenti (čas/kom.) MAŠINE A	B	C
P_1	500	150	2	1	1
P_2	400	100	1	3	0
P_3	200	80	1	0	1
Kapaciteti mašina (časova)			400	1000	800

Kapacitet mašine A treba 100% iskoristiti. Fiksni troškovi su 10000 din.

20. ZADATAK

Odredite optimalni program proizvodnje proizvoda A, B, C i D, uz maksimalnu ekonomičnost, pri sledećim uslovima:

Izvori	Tehnički koeficijenti (maš. čas/kom.) PROIZVODI A	B	C	D	Kapacitet (maš. čas)
M_1	2	2	0	0	120
M_2	2	2	6	8	240
M_3	0	8	12	4	480

Prodajna cena jedinice proizvoda iznosi 6 n.j., 18 n.j., 12 n.j. i 18 n.j., respektivno. Proporcionalni troškovi iznose po 6 novčanih jedinica po komadu svakog proizvoda, a fiksni troškovi su 18 n.j.

21. ZADATAK

Potrebno je odrediti onaj godišnji program proizvodnje fabrike koji obezbeđuje maksimalnu ekonomičnost. Program treba odrediti u uslovima ograničenosti kapaciteta mašina, raspoloživih količina sirovina i obima moguće realizacije, kako je dato sledećom tabelom:

Resursi	PROIZVODI A_1	A_2	A_3	Kapaciteti
Mašina (čas/kom.)	3	1	2	2200 čas/god.
Sirovina (kg/kom.)	5	2	8	3900 kg/god.
Plasmanski limiti				

-donji (kom.)	500	100	100	
-gornji (kom.)	600	600	250	

Proporcionalni troškovi su, redom 20 n.j., 10 n.j i 20 n.j. po komadu proizvoda, a fiksni troškovi 50000 n.j. Prodajne cene su, redom 200 n.j., 350 n.j. i 250 n.j. po komadu proizvoda. Odredite optimalni obim proizvodnje!