# NELINEARNO PROGAMIRANJE

## 4.1. REŠAVANJE NELINEARNIH MODELA LINEARNOM APROKSIMACIJOM

Model konveksnog programiranja je model sa konveksnim skupom mogućih rešenja i konveksnom funkcijom kriterijuma. Neka je dat model sa linearnim ograničenjima i nelinearnom (konveksnom) separabilnom funkcijom cilja:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A} \cdot \underline{x} \geq \underline{b}$$
$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = v \rightarrow \min$$

sa posebnim uslovima:

$$x_j \leq a_j, \quad f_j(x_j) \geq 0, \quad f_j(0) = 0, \quad \text{za svako } j.$$

Neka je svaka početna nelinearna funkcija $f_j$ aproksimirana izlomljenim dužima; na ovaj način polazni model dobija linearni oblik, uz povećan broj promenljivih i povećan broj ograničavajućih uslova. Linearizacija se vrši odvojeno za svaku nelinearnu funkciju $f_j$ funkcije kriterijuma. Algoritam linearizacije funkcije $f_j$ je sledeći:

- na osnovu sistema ograničavcajućih uslova određuje se mogući interval vrednosti $x_j$:

  $$0 \leq x_j \leq a_j$$

ako gornji limit $a_j$ nije eksplicitno zadat, tada se određuje na osnovu ograničavajućih uslova oblika jednako i manje-jednako iz sistema ograničenja modela, dodeljujući minimalnu moguću vrednost ostalim promenljivama

- dobijeni interval se deli na podintervale:

  $$0 = a_{j0} < a_{j1} < a_{j2} < \ . \ . \ . < a_{jk} = a_j$$

veći broj podintervala znači veću tačnost računanja ali i usložnjavanje računskih operacija;

obično se bira bar dva podintervala

- za svaki podinterval se uvodi nova promenljiva tako da je:
  $x_j = x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jk}$

- za svaku uvedenu promenljivu važi:
  $x_{js} \le a_{js} - a_{j,s-1}$, za svako $s$

- za funkciju kriterijuma $f_j$ izračunavaju se linearni koeficijenti; prvo se određuju vrednosti funkcije kriterijuma za granice podintervala:
  $f_j(0),\ f_j(a_{j1}),\ f_j(a_{j2}),\ \ldots,\ f_j(a_{jk})$

dok se koeficijenti dobijaju kao prosečne vrednosti intervala:

$$c_{js} = tg\alpha_{js} = \frac{f_j(a_{js}) - f_j(a_{j,s-1})}{a_{js} - a_{j,s-1}}$$

- u funkciji kriterijuma funkcija $f_j(x_j)$ se aproksimira funkcijom:
  $c_{j1} \cdot x_{j1} + c_{j2} \cdot x_{j2} + \ldots + c_{jk} \cdot x_{jk}$

- u sistemu ograničavajućih uslova vrši se zamena:
  $x_j = x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jk}$

- sistem ograničenja se dopunjava limitima:
  $x_{js} \le a_{js} - a_{j,s-1}$, za svako $s$.

Navedeni algoritam se sprovodi za svaku nelinearnu funkciju $f_j$ u funkciji kriterijuma modela. Dobijeni linearizovani model se rešava uobičajenim simpleks postupkom. Pri ekonomskoj interpretaciji neophodno je uzeti u obzir uvedene smene i aproksimacije.

Postoje problemi sa nelinearnom funkcijom kriterijuma koje se ne mogu rešavati navedenim metodom linearne aproksimacije, napr. kada se traži minimum funkcije kriterijuma a postoji bar jedan konkavan deo te funkcije (tj. funkcija sa maksimumom) ili kada se traži maksimum funkcije kriterijuma čiji jedan deo ima minimum.

Posebnu grupu problema, koji su česti u privrednoj praksi, čine modeli kod kojih se funkcija kriterijuma ne pojavljuje u nelinearnom obliku već je inicijalno data linearnim funkcijama po određenim segmentima; ovakav problem se rešava metodima primenjenim kod linearnog programiranja.

## 4.2. KVADRATNO PROGRAMIRANJE

Neka je dat sledeći model kvadratnog programiranja, sa nelinearnom funkcijom cilja drugog stepena:

$$
\begin{aligned}
&x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \ge 0\\
&a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n \le b_1\\
&a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n \le b_2\\
&\quad\vdots\\
&a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n \le b_m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
&c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2+\ldots+c_n\cdot x_n+c_{11}\cdot x_1^2 +c_{12}\cdot x_1\cdot x_2+\ldots+c_{1n}\cdot x_1\cdot x_n+\\
&+c_{21}\cdot x_2\cdot x_1+c_{22}\cdot x_2^2 +\ldots+c_{2n}\cdot x_2\cdot x_n+\ldots+c_{n1}\cdot x_n\cdot x_1+\ldots+c_{nn}\cdot x_n^2 =\\
&= z \to \max, \text{ uz uslov da je: } c_{kj} = c_{jk}
\end{aligned}
$$

U matričnom obliku model je:

$$
\begin{aligned}
\underline{x} &\ge \underline{0}\\
\underline{A}\cdot\underline{x} &\le \underline{b}\\
\underline{c}^T\cdot\underline{x} + \underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x} &= z_1 \to \max
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

gde je $\underline{c}^T$ vektor vrsta koeficijenata linearnih članova funkcije kriterijuma, a $\underline{C}=[c_{kj}]$, $j,k=1,2,\ldots,n$ je simetrična matrica koeficijenata promenljivih drugog stepena u funciji kriterijuma.

Primenom simpleks postupka definisani zadatak se rešava po sledećem algoritmu:

***1. Formulisanje duala zadatka:***

$$
\begin{aligned}
\underline{u}^T &\ge \underline{0}^T\\
\underline{u}^T\cdot\underline{A} &\ge \underline{c}^T + 2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C}\\
\underline{u}^T\cdot\underline{b} &= z_2 \to \min
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

gde je $\underline{c}^T + 2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C}$ gradijentni vektor (ili gradijent) funkcije kriterijuma $z$, tj.

$$
\underline{c}^T + 2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C} = \left[\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right]
$$

***2. Spajanjem primarnih i dualnih uslova u jedinstveni zadatak*** dobija se model kvadratnog programiranja

$$
\begin{aligned}
&\underline{x} \ge \underline{0},\quad \underline{u} \ge \underline{0} && \text{(a)}\\
&\underline{A}\cdot\underline{x} \le \underline{b} && \text{(b)}\qquad (4)\\
&2\cdot\underline{C}\cdot\underline{x} - \underline{A}^T\cdot\underline{u} \le -\underline{c} && \text{(c)}\\
&\underline{u}^T\cdot\underline{b} - (\underline{c}^T\cdot\underline{x} + \underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x}) = z_3 \to \min && \text{(d)}
\end{aligned}
$$

Ako model ima moguće rešenje, tada postoji i optimalno rešenje, sa funkcijom kriterijuma jednakom nuli (vrednosti funkcija kriterijuma para primarnog-dualnog zadatka jednake su). Optimalno rešenje zadatka modela kvadratnog programiranja se dobija primenom simpleks algoritma; rešenje je ono koje zadovoljava kako primarna tako i dualna ograničenja.

Funkcija kriterijuma se modifikuje na sledeći način:

$$
\underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{I}\cdot\underline{u}^d = \underline{b} \qquad /\cdot\underline{u}^T
$$

$$2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C} - \underline{u}^T\cdot\underline{A} + \underline{I}\cdot\underline{x}^{dT} = -\underline{c}^T \quad /\cdot\underline{x}$$

$$\underline{u}^T\cdot\underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{u}^T\cdot\underline{u}^d = \underline{u}^T\cdot\underline{b} \qquad +$$

$$2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x} - \underline{u}^T\cdot\underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{x}^{dT}\cdot\underline{x} = -\underline{c}^T\cdot\underline{x}$$

$$2\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{u}^T\cdot\underline{u}^d + \underline{x}^{dT}\cdot\underline{x} = \underline{u}^T\cdot\underline{b} - \underline{c}^T\cdot\underline{x} \qquad /+2\cdot\underline{c}^T\cdot\underline{x}$$

$$2\cdot(\underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{c}^T\cdot\underline{x}) = \underline{u}^T\cdot\underline{b} + \underline{c}^T\cdot\underline{x} - \underline{u}^T\cdot\underline{u}^d - \underline{x}^{dT}\cdot\underline{x}$$

$$\underline{x}^T\cdot\underline{C}\cdot\underline{x}+\underline{c}^T\cdot\underline{x}=(1/2)\cdot(\underline{u}^T\cdot\underline{b}+\underline{c}^T\cdot\underline{x})-(1/2)\cdot(\underline{u}^T\cdot\underline{u}^d+\underline{x}^{dT}\cdot\underline{x})=z\rightarrow max \qquad \text{(e)}$$

Vrednost funkcije kriterijuma dobijena je kao jedna polovina izraza koji sadrži sve promenljive modela (4). U prvoj zagradi se nalaze linearni a u drugoj kvadratni članovi za koje se u slučaju komplementarnosti ostvaruje:

$$\underline{u}^T\cdot\underline{u}^d + \underline{x}^{dT}\cdot\underline{x} = 0$$

Polazna simpleks tabela koja sadrži ograničavajuće uslove (a), (b) i (c) i funkciju kriterijuma

$$(1/2)\cdot(\underline{u}^T\cdot\underline{b} + \underline{c}^T\cdot\underline{x}) = z(4) \rightarrow max \qquad \text{(f)}$$

je sledeća:

| | $\underline{x}^T$ | $\underline{u}^T$ | |
|---|---|---|---|
| $\underline{u}^d$ | $\underline{A}$ | $\underline{0}$ | $\underline{b}$ |
| $\underline{x}^d$ | $2\cdot\underline{C}$ | $-\underline{A}^T$ | $-\underline{c}$ |
| | $(1/2)\cdot\underline{c}^T$ | $(1/2)\cdot\underline{b}^T$ | 0 |

U gornjoj tabeli se nalaze sledeći vektori:

$\underline{x}_t = [x_1, x_2, ..., x_n]$ vektor primarnih promenljivih

$\underline{u}_t = [u_1, u_2, ..., u_m]$ vektor dualnih promenljivih

$$\underline{u}^d = \begin{bmatrix} u_1^d \\ u_2^d \\ \cdots \\ u_m^d \end{bmatrix}$$ vektor dopunskih promenljivih za blok primarnih uslova

$$\underline{x}^d = \begin{bmatrix} x_1^d \\ x_2^d \\ \cdots \\ x_n^d \end{bmatrix}$$ vektor dopunskih promenljivih za blok dualnih uslova

***Kriterijumi optimalnosti***

- Transformisani oblik poslednje kolone mora biti nenegativan: $\underline{b}' \geq \underline{0}$
- U optimalnoj tabeli bitan je položaj promenljivih (što proizilazi iz osnovne teorije linearnog programiranja), i to: ako je $x_j$ bazna, tada $x_j^d$ obavezno mora biti vanbazna promenljiva i obratno; ovo važi za sve primarne i dopunske promenljive za dual, a isto tako i za parove dualnih i dopunskih promenljivih za primarni blok ograničenja. Znači, u optimalnoj tabeli niti u bazi niti van baze istovremeno se ne nalazi par jedne te iste promenljive. Parovi o kojima se radi su, dakle:

  $u_i$ sa $u_i^d$, $i=1,2,...,m$

  $x_j$ sa $x_j^d$, $j=1,2,...,n$

***Napomene***

- Formiranje dualnih uslova sledi tok pridruživanja duala u linearnom programiranju.
- Iz tabele se može izostaviti red funkcije kriterijuma.
- Uslove oblika ≥ treba pomnožiti sa -1.
- Nova tabela se dobija elementarnom baznom transformacijom.
- Kod izbora ishodnog elementa se analizira kompletna matrica , i po mogućstvu se bira elemenat sa relacije $u_i - u_i^d$ ili $x_j^d - x_j$, i vodi se računa o potrebi korekcije negativnih elemenata u poslednjoj koloni.
- U optimalnoj tabeli sve vanbazne promenljive su vrednosti nula, a za bazne promenljive (primarne, dualne i dopunske) vrednosti se nalaze u poslednjoj koloni.

**PRIMER 84.** U jednoj fabrici proizvode se proizvodi A, B i C, pod sledećim uslovima:

a) u proizvodnji radi 1200 radnika, koje treba sve zaposliti, a moguće je angažovati, po potrebi, i dodatnu radnu snagu; normativi proizvodnje su angažovanje po jednom komadu proizvoda, redom, dva, četiri, odnosno dva radnika

b) kapacitete mašina $M_1$ i $M_2$, na kojima se obrađuju proizvodi, kao i odgovarajuće tehničke koeficijente pokazuje sledeća tabela:

| | Tehnički koeficijenti (čas/kom.) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mašine | A | B | C | Kapaciteti (čas) |
| $M_1$ | 6 | 3 | 1 | 2100 |
| $M_2$ | 1 | 1 | 1 | 360 |

c) troškovi proizvodnje se aproksimiraju funkcijom:

$$v = 200 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2^2 - x_2 + 600 x_3$$

gde $x_j$, $j=1,2,3$ označava broj komada A, B i C, respektivno.

Odredite optimalni asortiman linearnom aproksimacijom, birajući tri jednaka intervala kod linearizacije!

**R 84.** Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1200 \quad (1)$$
$$6x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2100 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 360 \quad (3)$$
$$200x_1 + 0{,}5x_2^2 - x_2 + 600x_3 = v \rightarrow \min$$

***Postupak linearizacije funkcije*** $f(x_2) = 0{,}5x_2^2 - x_2$

Neka su $x_1=0$ i $x_3=0$, tada je iz (2) i (3):

$3x_2 \leq 2100$, sledi $x_2 \leq 700$

$x_2 \leq 360$

znači, $x_2$ je najviše 360, tj, važi $0 \leq x_2 \leq 360$. Promenljivu $x_2$ podelimo na tri dela:

$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$

i dati interval $[0,\ 360]$ na tri jednaka podintervala:

$[0,\ 120]$, $[120,\ 240]$ i $[240,\ 360]$

Vrednosti funkcije $f(x_2)$ za granice podintervala su:

$f(0)=0$, $f(120)=7080$, $f(240)=28560$, $f(360)=64440$.

Koeficijenti u linearizovanoj funkciji su:

$$c_{21} = \frac{7080 - 0}{120 - 0} = 59$$
$$c_{22} = \frac{28560 - 7080}{240 - 120} = 179$$
$$c_{23} = \frac{64440 - 28560}{360 - 240} = 299$$

Uvedene promenljive važe za odgovarajuće podintervale:

$$x_{21} \leq 120 = 120 - 0$$
$$x_{22} \leq 120 = 240 - 120$$
$$x_{23} \leq 120 = 360 - 240$$

Linearizovani oblik modela:

$$\begin{aligned}
&x_1,\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_3 \geq 0\\
&2x_1 + 4x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 2x_3 \geq 1200\\
&6x_1 + 3x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_3 \leq 2100\\
&x_1 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_3 \leq 360\\
&x_{21} \leq 120\\
&x_{22} \leq 120\\
&x_{23} \leq 120\\
&200x_1 + 59x_{21} + 179x_{22} + 299x_{23} + 600x_3\ v \rightarrow \min
\end{aligned}$$

| | $x_1$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | -2 | -4 | -4 | -4 | -2 | -1200 |
| $d_2$ | 6 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2100 |
| $d_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 360 |
| $d_4$ | 0 | **(1)** | 0 | 0 | 0 | 120 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| | -200 | -59 | -179 | -299 | -600 | 0 |
| | $x_1$ | $d_4$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_3$ | |
| $d_1$ | -2 | 4 | -4 | -4 | -2 | -720 |
| $d_2$ | 6 | -3 | 3 | 3 | 1 | 1740 |
| $d_3$ | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 240 |
| $x_{21}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| $d_5$ | 0 | 0 | **(1)** | 0 | 0 | 120 |
| | -200 | 59 | -179 | -299 | -600 | 7080 |
| | $x_1$ | $d_4$ | $d_5$ | $x_{23}$ | $x_3$ | |
| $d_1$ | -2 | 4 | 4 | **(-4)** | -2 | -240 |
| $d_2$ | 6 | -3 | -3 | 3 | 1 | 1380 |
| $d_3$ | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 120 |
| $x_{21}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| $x_{22}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| | -200 | 59 | 179 | -299 | -600 | 28560 |
| | $x_1$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_1$ | $x_3$ | |
| $x_{23}$ | 1/2 | -1 | -1 | -1/4 | 1/2 | 60 |
| $d_2$ | 9/2 | 0 | 0 | 3/4 | -1/2 | 1200 |
| $d_3$ | 1/2 | 0 | 0 | 1/4 | 1/2 | 60 |
| $x_{21}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| $x_{22}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| | -101/2 | -240 | -120 | -299/4 | -901/2 | 46500 |

Rešenje: $x_1=0$, $x_{21}=120$, $x_{22}=120$, $x_{23}=60$, sledi $x_2=300$, $x_3=0$, $v=46500$.

***Analiza rešenja***

Potrebno je proizvesti 300 komada proizvoda B, čime se aproksimira optimum. U ovom slučaju troškovi iznose 46500 novčanih jedinica. Uposleno je tačno 1200 radnika (ograničenje (1)), na mašini $M_1$ slobodan kapacitet je 1200 časova (ograničenje (2)), a na mašini $M_2$ 60 časova (ograničenje (3)).

**PRIMER 85.** Jedna fabrika proizvodi artikle $A_i$ (i=1,2,3,4) koji prolaze kroz dve faze obrade na mašinama $M_1$ i $M_2$, i za koje se koristi sirovina S. Tehnički koeficijenti i kapaciteti su sledeći:

| Izvori | Tehnički koeficijenti $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | Kapaciteti |
|---|---|---|---|---|---|
| S (kg/kom.) | 1 | 2 | 3 | 1 | neograničeno |
| $M_1$ (čas/kom.) | 2 | 1 | 1 | 2 | 7000 časova |

| | | |
|---|---|---|
| $M_2$ (čas/kom.) | 1 6 4 1 | 4200 časova |

Odredite godišnji asortiman proizvodnje uz minimalne troškove! Funkcija troškova je: $0,5x_1^2 + 2x_1 + 3500x_2 + 6000x_3 + 3200x_4 = z$

gde $x_i$ označava broj komada $A_i$, $i=1,2,3,4$.

Pored datih uslova treba udovoljiti i sledećim zahtevima:

a) od sirovine S treba preraditi najmanje 3200 kg

b) kapacitete mašine $M_1$ treba iskoristiti 100%

c) kooperantima treba obezbediti najmanje 1000 komada $A_4$

d) kupci $K_i$, i=1,2,3,4,5,6 traže 400 komada, 1000 komada, 500 komada, 200 komada, 300 komada i 600 komada proizvoda $A_1$. Tražnji se ne mora udovoljiti, ali veće količine nije moguće plasirati.

Postavite model, izvršite linearnu aproksimaciju i postavite polaznu simpleks tabelu!

**R 85.** Model:

$$
\begin{aligned}
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3200\\
&2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7000\\
&x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4200\\
&x_4 \geq 1000\\
&x_1 \leq 3000
\end{aligned}
$$

$$0,5x_1^2 + 2x_1 + 3500x_2 + 6000x_3 + 3200x_4 = v \rightarrow \min$$

Podaci za linearizaciju:

$$f(x_1) = 0,5x_1^2 + 2x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 3000$$

$$
\begin{array}{lll}
f(0) = 0 & & \\
f(1000) = 502000 & c_{11} = 502 & x_{11} \leq 1000\\
f(2000) = 2004000 & c_{12} = 1502 & x_{12} \leq 1000\\
f(3000) = 4506000 & c_{13} = 2502 & x_{13} \leq 1000
\end{array}
$$

Linearni oblik modela:

$$
\begin{aligned}
&x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0\\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3200\\
&2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7000\\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + 6x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4200\\
&x_4 \geq 1000\\
&x_{11} \leq 1000\\
&x_{12} \leq 1000\\
&x_{13} \leq 1000
\end{aligned}
$$

$$502x_{11}+1502x_{12}+2502x_{13}+3500x_2+6000x_3+3200x_4 = v \rightarrow \min$$

Uvodi se smena $x_4=1000+y_4$

| | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | -1 | -1 | -1 | -2 | -3 | -1 | -2200 |
| $v_2$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 5000 |
| $d_3$ | 1 | 1 | 1 | 6 | 4 | 1 | 3200 |
| $d_4$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| $d_5$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| $d_6$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| | -502 | -1502 | -2502 | -6000 | -6000 | -3200 | 3200000 |

**PRIMER 86.** Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B, C) pod sledećim uslovima:

a) svaki proizvod se obrađuje na mašini čiji je kapacitet 36 časova, dok se po jedinici proizvoda angažuje 3 časa, 1 čas i 1 čas respektivno,

b) potrebno je preraditi najmanje 60 kg sirovine, koja se troši u količinama od 2 kg, 2 kg i 3 kg po komadu proizvoda A, B i C, respektivno,

c) Proizvoda C treba proizvesti najmanje toliko koliko od proizvoda A,

d) troškovi proizvodnje aproksimirani su funkcijom:

$$6x_1 + 2x_2^2 + x_2 + 3x_3^2 - x_3 = v$$

gde $x_1$, $x_2$ i $x_3$ označavaju količine proizvoda A, B i C, respektivno.

**86.1.** Postavite model programiranja uz cilj minimalnih ukupnih troškova proizvodnje!

**86.2.** Postavljeni model rešite primenom linearne aproksimacije, birajući tri jednaka podintervala!

**86.3.** Rešite model metodom kvadratnog programiranja!

**R 86.1.** Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 36$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 60$$
$$x_1 + \quad - x_3 \leq 0$$
$$6x_1 + 2x_2^2 + x_2 + 3x_3^2 - x_3 = v \rightarrow \min$$

**R 86.2.** Linearni oblik modela:

$$x_1,\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33} \geq 0$$
$$3x_1 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 36$$
$$2x_1 + 2x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} \geq 60$$
$$x_1 - x_{31} - x_{32} - x_{33} \leq 0$$
$$x_{21} \leq 12$$
$$x_{22} \leq 12$$

$$x_{31} \leq 12$$
$$x_{32} \leq 12$$
$$6x_1 + 25x_{21} + 73x_{22} + 121x_{23} + 35x_{31} + 107x_{32} + 179x_{33} = v \rightarrow \min$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | |
| $d_1$ | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 |
| $d_2$ | **(−2)** | −2 | −2 | −2 | −3 | −3 | −3 | −60 |
| $d_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | −1 | 0 |
| $d_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| $d_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | −6 | −25 | −73 | −121 | −35 | −107 | −179 | 0 |
| | $d_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | |
| $d_1$ | 3/2 | −2 | −2 | −2 | −7/2 | −7/2 | −7/2 | −54 |
| $x_1$ | −1/2 | 1 | 1 | 1 | 3/2 | 3/2 | 3/2 | 30 |
| $d_3$ | 1/2 | −1 | −1 | −1 | −5/2 | −5/2 | −5/2 | −30 |
| $d_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| $d_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | −3 | −19 | −67 | −115 | −26 | −98 | −170 | 180 |
| | $d_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $d_1$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | |
| $x_{31}$ | −3/7 | 4/7 | 4/7 | 4/7 | −2/7 | 1 | 1 | 108/7 |
| $x_1$ | 1/7 | 1/7 | 1/7 | 1/7 | 3/7 | 0 | 0 | 48/7 |
| $d_3$ | −4/7 | 3/7 | 3/7 | 3/7 | −5/7 | 0 | 0 | 60/7 |
| $d_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $d_6$ | 3/7 | −4/7 | −4/7 | −4/7 | 2/7 | −1 | −1 | −24/7 |
| $d_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | −99/7 | −29/7 | −365/7 | −701/7 | −52/7 | −72 | −144 | 4068/7 |
| | $x_{22}$ | $d_4$ | $d_1$ | $x_{23}$ | $d_2$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | |
| $x_{31}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| $x_1$ | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 | 1/2 | −1/4 | −1/4 | 6 |
| $d_3$ | −1/4 | 3/4 | 0 | 0 | −1/2 | −3/4 | −3/4 | 6 |
| $d_4$ | 3/4 | 7/4 | −1 | −1 | 1/2 | −7/4 | −7/4 | 6 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $x_{21}$ | −3/4 | −7/4 | 1 | 1 | −1/2 | 7/4 | 7/4 | 6 |
| $d_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | −69/4 | −29/4 | −48 | −96 | −19/2 | −259/4 | −547/4 | 606 |

Rešenje:

$x_1=6,\ x_{21}=6,\ x_{22}=0,\ x_{23}=0,\ x_{31}=12,\ x_{32}=0,\ x_{33}=0$, tj.

$x_1 = 6,\ x_2 = 6,\ x_3 = 12,\ v = 606.$

Prema ovom programu treba proizvesti 6 jedinica A, 6 jedinica B i 12 jedinica C. Aproksimativni ukupni troškovi iznose 606 jedinica. Realizacijom ovakvog proizvodnog programa kapacitet mašine će biti 100% iskorišćen i biće prerađeno

60 kg sirovine.

**R 86.3.** Prvi parcijalni izvodi funkcije kriterijuma:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 6 \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 4x_2 + 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x_3} = 6x_3 - 1$$

Sistem primarnih ograničenja:

$$\begin{aligned}
-3x_1 - x_2 - x_3 &\geq -36 \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 60 \\
-x_1 + x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Dualna ograničenja su:

$$\begin{aligned}
-3u_1 + 2u_2 - u_3 &\leq 6 \\
-u_1 + 2u_2 &\leq 4x_2 + 1 \\
-u_1 + 3u_2 + u_3 &\leq 6x_3 - 1
\end{aligned}$$

Kompletan model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 36 \\
-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\leq -60 \\
x_1 - x_3 &\leq 0 \\
-3u_1 + 2u_2 - u_3 &\leq 6 \\
-4x_2 - u_1 + u_2 &\leq 1 \\
-6x_3 - u_1 + 3u_2 + u_3 &\leq -1
\end{aligned}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^d$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 36 |
| $u_2^d$ | –2 | **(–2)** | –3 | 0 | 0 | 0 | –60 |
| $u_3^d$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1^d$ | 0 | 0 | 0 | –3 | 2 | –1 | 6 |
| $x_2^d$ | 0 | –4 | 0 | –1 | 2 | 0 | 1 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | –6 | –1 | 3 | 1 | –1 |
| | $x_1$ | $u_2^d$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | |
| $u_1^d$ | 2 | 1/2 | –1/2 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $x_2$ | 1 | –1/2 | 3/2 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| $u_3^d$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1^d$ | 0 | 0 | 0 | –3 | **(2)** | –1 | 6 |
| $x_2^d$ | 4 | –2 | 6 | –1 | 2 | 0 | 121 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | –6 | –1 | 3 | 1 | –1 |
| | $x_1$ | $u_2^d$ | $x_3$ | $u_1$ | $x_1^d$ | $u_3$ | |
| $u_1^d$ | 2 | 1/2 | –1/2 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $x_2$ | 1 | –1/2 | 3/2 | 0 | 0 | 0 | 30 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_3^d$ | **(1)** | 0 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | 0 | 0 | –3/2 | 1/2 | –1/2 | 3 |
| $x_2^d$ | 4 | –2 | 6 | 2 | –1 | 1 | 115 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | –6 | 7/2 | –3/2 | 5/2 | –10 |

| | $u_3^d$ | $u_2^d$ | $x_3$ | $u_1$ | $x_1^d$ | $u_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^d$ | –2 | 1/2 | **(3/2)** | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $x_2$ | –1 | –1/2 | 5/2 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| $x_1$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | 0 | 0 | –3/2 | 1/2 | –1/2 | 3 |
| $x_2^d$ | –4 | –2 | 10 | 2 | –1 | 1 | 115 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | –6 | 7/2 | –3/2 | 5/2 | –10 |

| | $u_3^d$ | $u_2^d$ | $u_1^d$ | $u_1$ | $x_1^d$ | $u_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | –4/3 | 132 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 7/3 | –4/3 | –5/3 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_1$ | –1/3 | 1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 1/2 | –1/2 | 3 |
| $x_2^d$ | 28/3 | –16/3 | –20/3 | 2 | –1 | 1 | 75 |
| $x_3^d$ | –8 | 2 | 4 | **(7/2)** | –3/2 | 5/2 | 14 |

| | $u_3^d$ | $u_2^d$ | $u_1^d$ | $x_3^d$ | $x_1^d$ | $u_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | –4/3 | 132 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 7/3 | –4/3 | –5/3 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_1$ | –1/3 | 1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $u_2$ | –24/7 | 6/7 | 12/7 | 3/7 | –1/7 | 4/7 | 9 |
| $x_2^d$ | **(292/21)** | –136/21 | –138/21 | –4/7 | –1/7 | –1/7 | 67 |
| $u_1$ | –16/7 | 4/7 | 8/7 | 2/7 | –3/7 | 5/7 | 4 |

| | $x_2^d$ | $u_2^d$ | $u_1^d$ | $x_3^d$ | $x_1^d$ | $u_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | | | | | | | 3044/292 |
| $x_2$ | | | | | | | 2557/292 |
| $x_1$ | | | | | | | 1637/292 |
| $u_2$ | | | | | | | 7452/292 |
| $u_3^d$ | | | | | | | 1407/292 |
| $u_1$ | | | | | | | 4384/292 |

Rešenje:

$x_1 = 5,61$ $\qquad x_1^d = 0$

$x_2 = 8,75$ $\qquad x_2^d = 0$

$x_3 = 10,42$ $\qquad x_3^d = 0$

$$u_1 = 15{,}01 \qquad u_1^d = 0$$
$$u_2 = 25{,}52 \qquad u_2^d = 0$$
$$u_3 = 0 \qquad u_3^d = 4{,}81$$
$$v = 511{,}20$$

Treći primarni uslov se ne ostvaruje u vidu jednakosti, razlika u obimu proizvodnje proizvoda C i A je 4,81 jedinica ($u_3^d = 4{,}81$), odnosno, $x_3 - x_1 = 10{,}42 - 5{,}61 = 4{,}81$.

Prvi i drugi primarni uslov su ostvareni u vidu jednakosti ($u_1^d = 0$ i $u_2^d = 0$), što znači da se kapacitet mašine koristi 100% i prerađuje se tačno 60 kg sirovine.

Dualni uslovi su takođe ostvareni u vidu jednakosti ($x_1^d = 0$, $x_2^d = 0$, $x_3^d = 0$). Vrednost funkcije kriterijuma je 511,20.

**PRIMER 87.** Rešite sledeći model primenom metoda kvadratnog programiranja:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$$
$$4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = z \rightarrow \max$$

**R 87.** Elementi gradijentnog vektora funkcije kriterijuma su:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -6 + 6x_1 + 2x_3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 6x_3 + 4x_1 + 2x_2$$

što je u matričnom obliku: $\nabla z = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Sistem dualnih ograničenja formiran dodeljivanjem $u_1$ i $u_2$ redom prvom i drugom primarnom ograničenju (dualno ograničenje formirano je po kolonama primarnih ograničenja, a desne strane su prvi parcijalni izvodi funkcije kriterijuma):

$$u_1,\ u_2 \geq 0$$
$$2u_1 + u_2 \geq 4 + 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$$
$$3u_1 + 2u_2 \geq -6 + 6x_1 + 2x_3$$
$$u_1 + 2u_2 \geq \square \quad 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

Sistem primarnih i dualnih ograničenja u sređenom obliku je:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ u_1,\ u_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2u_1 - u_2 \le -4$$
$$6x_1 + 2x_3 - 3u_1 - 2u_2 \le 6$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 - u_1 - 2u_2 \le 0$$

dok je funkcija kriterijuma koja daje istu vrednost kao i kvadratna funkcija primarnog modela:

$$0,5\cdot(4x_1-6x_2) + 0,5\cdot(30u_1+20u_2) = 2x_1-3x_2+15u_1+10u_2 = z \to \max$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^d$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| $u_2^d$ | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 20 |
| $x_1^d$ | 2 | 6 | 4 | -2 | **(-1)** | -4 |
| $x_2^d$ | 6 | 0 | 2 | -3 | -2 | 6 |
| $x_3^d$ | 4 | 2 | 6 | -1 | -2 | 0 |
| | 2 | -3 | 0 | 15 | 10 | 0 |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $x_1^d$ | |
| $u_1^d$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| $u_2^d$ | **(1)** | 2 | 2 | 0 | 0 | 20 |
| $u_2$ | -2 | -6 | -4 | 2 | -1 | 4 |
| $x_2^d$ | 2 | -12 | -6 | 1 | -2 | 14 |
| $x_3^d$ | 0 | -10 | -2 | 3 | -2 | 8 |
| | 22 | 57 | 40 | -5 | 10 | -40 |

| | $u_2^d$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $x_1^d$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^d$ | -2 | -1 | **(-3)** | 0 | 0 | -10 |
| $x_1$ | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 20 |
| $u_2$ | 2 | -2 | 0 | 2 | -1 | 44 |
| $x_2^d$ | -2 | -16 | -10 | 1 | -2 | -26 |
| $x_3^d$ | 0 | -10 | -2 | 3 | -2 | 8 |
| | -22 | 13 | -4 | -5 | 10 | -480 |
| | $u_2^d$ | $x_2$ | $u_1^d$ | $u_1$ | $x_1^d$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2/3 | 1/3 | -1/3 | 0 | 0 | 10/3 |
| $x_1$ | -1/3 | 4/3 | 2/3 | 0 | 0 | 40/3 |
| $u_2$ | 2 | -2 | 0 | 2 | -1 | 44 |
| $x_2^d$ | 14/3 | -38/3 | -10/3 | 1 | -2 | 22/3 |
| $x_3^d$ | 4/3 | -28/3 | -2/3 | **(3)** | -2 | 44/3 |
| | -58/3 | 43/3 | -4/3 | -5 | -10 | -1400/3 |
| | $u_2^d$ | $x_2$ | $u_1^d$ | $x_3^d$ | $x_1^d$ | |
| $x_3$ | 2/3 | 1/3 | -1/3 | 0 | 0 | 10/3 |
| $x_1$ | -1/3 | 4/3 | 2/3 | 0 | 0 | 40/3 |
| $u_2$ | 10/9 | 38/9 | 4/9 | -2/3 | 1/3 | 308/9 |
| $x_2^d$ | 38/9 | -86/9 | -28/9 | -1/3 | -4/3 | 22/9 |
| $u_1$ | 4/9 | -28/9 | -2/9 | 1/3 | -2/3 | 44/9 |
| | -154/9 | -4/3 | -22/9 | 5/3 | -40/3 | -3980/9 |

Optimalno rešenje:

$x_1 = 40/3 \qquad x_1^d = 0$

$x_2 = 0 \qquad x_2^d = 22/9$

$x_3 = 10/3 \qquad x_3^d = 0$

$u_1 = 44/9 \qquad u_1^d = 0$

$u_2 = 308/9 \qquad u_2^d = 0$

$z_{max} = 442,2$

**PRIMER 88.** Za proizvodnju proizvoda A, B i C potrebno je preraditi dnevno najmanje 8 jedinica sirovine S. Proizvodi se obrađuju na postrojenju P čiji je dnevni kapacitet 9 časova. Tehnički koeficijenti su sledeći:

| | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| Sirovina S | (jedinica/kom.) | 1,0 | 0,5 | 1,5 |
| Postrojenje P | (čas/kom.) | 0,5 | 1,0 | 0,5 |

Odredite dnevni plan proizvodnje ako je funkcija kriterijuma sledećeg oblika:

$$x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 30x_3 = v \rightarrow \min$$

gde $x_i$, $i=1,2,3$ označava broj komada A, B i C, respektivno.

**88.1.** Odredite aproksimativno rešenje!

**88.2.** Rešite zadatak metodom kvadratnog programiranja!

**R 88.1.** Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8$$
$$0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 \leq 9$$
$$x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 30x_3 = v \rightarrow \min$$

***Linearizacija:***

Podaci za $x_1$: $f(x_1) = x_1^2 - x_1$ $\quad 0 \leq x_1 \leq 18 \quad x_1 = x_{11} + x_{12}$

$f(0) = 0$

$f(9) = 72 \quad c_{11} = 8 \quad x_{11} \leq 9$

$f(18) = 306 \quad c_{12} = 26 \quad x_{12} \leq 9$

Podaci za $x_2$: $f(x_2) = x_2^2$ $\quad 0 \leq x_2 \leq 9 \quad x_2 = x_{21} + x_{22}$

$f(0) = 0$

$f(5) = 25 \quad c_{21} = 5 \quad x_{21} \leq 5$

$f(9) = 81 \quad c_{12} = 14 \quad x_{12} \leq 4$

Linearni oblik modela:

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22},\ x_3 \geq 0$$
$$x_{11} + x_{12} + 0{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + 1{,}5x_3 \geq 8$$
$$0{,}5x_{11} + 0{,}5x_{12} + x_{21} + x_{22} + 0{,}5x_3 \leq 9$$
$$x_{11} \leq 9$$
$$x_{12} \leq 9$$
$$x_{21} \leq 5$$
$$x_{22} \leq 4$$
$$8x_{11} + 26x_{12} + 5x_{21} + 14x_{22} + 30x_3 = v \rightarrow \min$$

| | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | **(-1)** | -1 | -1/2 | -1/2 | -3/2 | -8 |
| $d_2$ | 1/2 | 1/2 | 1 | 1 | 1/2 | 9 |
| $d_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| $d_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| $d_6$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| | -8 | -26 | -5 | -14 | -30 | 0 |
| | $d_1$ | $x_{12}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_3$ | |
| $x_{11}$ | -1 | 1 | 1/2 | 1/2 | 3/2 | 8 |
| $d_2$ | 1/2 | 0 | 3/4 | 3/4 | -1/4 | 5 |
| $d_3$ | 1 | -1 | -1/2 | -1/2 | -3/2 | 1 |
| $d_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| $d_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| $d_6$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| | -8 | -18 | -1 | -10 | -18 | 64 |

Rešenje:

$x_{11} = 8 \quad x_{12} = 0 \quad x_{21} = 0 \quad x_{22} = 0 \quad x_3 = 0 \quad v = 64$

***Analiza rešenja:*** Potrebno je proizvesti 8 komada proizvoda A. Očekivani aproksimativni troškovi iznose 64 jedinice. Na postrojenju P ostaće neiskorišćeno 5 časova, dok će se od sirovine S preraditi tražena minimalna količina od 8 jedinica.

**R 88.2.** Parcijalni izvodi funkcije kriterijuma su:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 2x_2 \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} = 30$$

Sistem primarnih ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 &\geq 8 \\ -0{,}5x_1 - x_2 - 0{,}5x_3 &\geq -9 \end{aligned}$$

Sistem dualnih ograničenja:

$$\begin{aligned} u_1 - 0{,}5u_2 &\leq 2x_1 - 1 \\ 0{,}5u_1 - u_2 &\leq 2x_2 \\ 1{,}5u_1 - 0{,}5u_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

Model kvadratnog programiranja:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ u_1,\ u_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 0{,}5x_2 - 1{,}5x_3 &\leq -8 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 &\leq 9 \\ -2x_1 + u_1 - 0{,}5u_2 &\leq -1 \\ -2x_2 + 0{,}5u_1 - u_2 &\leq 0 \\ 1{,}5u_1 - 0{,}5u_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^d$ | -1 | -1/2 | -3/2 | 0 | 0 | -8 |
| $u_2^d$ | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 9 |
| $x_1^d$ | (-2) | 0 | 0 | 1/2 | -1 | 0 |
| $x_2^d$ | 0 | -2 | 0 | 1/2 | -1 | 0 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | 0 | 3/2 | -1/2 | 30 |
| | $x_1^d$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | |
| $u_1^d$ | -1/2 | -1/2 | -3/2 | (-1/2) | 1/4 | -15/2 |
| $u_2^d$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 1/4 | -1/8 | 35/4 |
| $x_1$ | -1/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1/4 | 1/2 |
| $x_2^d$ | 0 | -2 | 0 | 1/2 | -1 | 0 |
| $x_3^d$ | 0 | 0 | 0 | 3/2 | -1/2 | 30 |
| | $x_1^d$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1^d$ | $u_2$ | |
| $u_1$ | 1 | 1 | 3 | -2 | -1/2 | 15 |
| $u_2^d$ | 0 | 3/4 | -1/4 | 1/2 | 0 | 5 |
| $x_1$ | 0 | 1/2 | 3/2 | -1 | 0 | 8 |
| $x_2^d$ | -1/2 | (-5/2) | -3/2 | 1 | -3/4 | -15/2 |
| $x_3^d$ | -3/2 | -3/2 | -9/2 | 3 | 1/4 | 15/2 |
| | $x_1^d$ | $x_2^d$ | $x_3$ | $u_1^d$ | $u_2$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 4/5 | 2/5 | 12/5 | -8/5 | -4/5 | 12 |
| $u_2^d$ | -3/20 | 3/10 | -7/10 | 4/5 | -9/40 | 11/4 |
| $x_1$ | -1/10 | 1/5 | 6/5 | -4/5 | -3/20 | 13/2 |
| $x_2$ | 1/5 | -2/5 | 3/5 | -2/5 | 3/10 | 3 |
| $x_3^d$ | -6/5 | -3/5 | -18/5 | 12/5 | 7/10 | 12 |

Rešenje:

$x_1 = 13/2 \qquad x_1^d = 0$

$x_2 = 3 \qquad x_2^d = 0$

$x_3 = 0 \qquad x_3^d = 12$

$u_1 = 12 \qquad u_1^d = 0$

$u_2 = 0 \qquad u_2^d = 11/4$

$v = 44,75$

**PRIMER 89.** Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B i C) pod sledećim uslovima:

a) Svaki proizvod se obrađuje na mašini M ukupnog kapaciteta od 18 časova, sa utroškom mašinskog vremena od, redom 3 časa, 1 časa i 1 časa po komadu proizvoda

b) Raspoložive količine sirovine S od 90 kg treba 100% utrošiti. Za 1 komad proizvoda A, B i C troši se 2 kg, 3 kg i 3 kg sirovine S, respektivno

c) Količina proizvoda A može biti najviše toliko koliko je količina proizvoda C

d) Troškovi proizvodnje su aproksimirani funkcijom

$12x_1+2x_2^2+10x_3$, gde su $x_1$, $x_2$ i $x_3$ količine A, B i C.

Postavite model, izvršite linearizaciju funkcije kriterijuma birajući tri jednaka intervala, i nađite jedno moguće rešenje!

**R 89.** Model: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 18\\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 90\\
x_1 - x_3 &\leq 0\\
12x_1 + 2x_2^2 + 10x_3 &= v \rightarrow \min
\end{aligned}
$$

Linearizacija:

$f(x_2) = 2x_2^2 \qquad 0 \leq x_2 \leq 18 \qquad x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$

$f(0) = 0$

$f(6) = 72 \qquad c_{21} = 72/6 = 12 \qquad x_{21} \leq 6$

$f(12) = 288 \qquad c_{22} = 216/6 = 36 \qquad x_{22} \leq 6$

$f(18) = 648 \qquad c_{23} = 360/6 = 60 \qquad x_{23} \leq 6$

Linearni oblik modela:

$x_1, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_3 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_3 &\leq 18\\
2x_1 + 3x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + 3x_3 &= 90\\
x_1 - x_3 &\leq 0\\
x_{21} &\leq 6
\end{aligned}
$$

$$x_{22} \quad \leq 6$$

$$x_{23} \quad \leq 6$$

$$12x_1 + 12x_{21} + 36x_{22} + 60x_{23} + 10x_3 = v \rightarrow \min$$

| | $x_1$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| $v_2$ | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 90 |
| $d_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $d_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $d_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $d_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| | -12 | -12 | -36 | -60 | -10 | 0 |

Sistem ograničavajućih uslova nije konzistentan, ne postoji moguće rešenje. Na mašini M može se preraditi najviše 54 kg sirovine S, znači nije moguće utrošiti ukupne zalihe od 90 kg.

**PRIMER 90.** U jednoj fabrici proizvode se proizvodi $P_1$, $P_2$ i $P_3$, pod sledećim uslovima:

a) za proizvodnju ovih proizvoda potrebno je utrošiti dnevno najmanje 100 kg sirovine, dok se po jednom komadu proizvoda troši, redom, 4 kg, 1 kg i 7 kg;

b) mašina M se dnevno može koristiti najviše u dve smene po 8 časova; za to vreme proizvodi se ili 5 komada $P_1$ ili 45 komada $P_3$; proizvod $P_2$ se ne obrađuje na ovoj mašini;

c) od proizvoda $P_2$ potrebno je za 5 komada više proizvesti nego od $P_3$.

Odredite dnevni plan proizvodnje – koristite metod linearne aproksimacije - ako je funkcija kriterijuma sledećeg oblika:

$$x_1 \cdot (5 - x_1) + 2x_2 + 3x_3 = v \rightarrow \min$$

**R 90.** Neka je $x_i$ broj komada $P_i$ (i=1,2,3). Model:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

$$4x_1 + x_2 + 7x_3 \geq 100$$

$$(16/5)x_1 + (16/45)x_3 \leq 16$$

$$x_2 - x_3 = 5$$

$$5x_1 - x_1^2 + 2x_2 + 3x_3 = v \rightarrow \min$$

Nelinearni deo funkcije kriterijuma $f(x_1)=5x_1-x_1^2$ ima maksimum, a traži se minimum funkcije kriterijuma, zato se optimum za dati model ne može utvrditi linearnom aproksimacijom i primenom simpleks algoritma.

**PRIMER 91.** Za jednu fabriku treba utvrditi optimalni plan proizvodnje za proizvode A, B i C. O uslovima proizvodnje i prodaje prikupljeni su sledeći podaci:

USLOVI PROIZVODNJE

| Mašine | Tehnički koeficijenti (čas/kom.) | | | Kapacitet (čas) |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| $M_1$ | 3 | 1 | 2 | 360 |
| $M_2$ | 1 | 1 | 1 | 250 |

USLOVI PRODAJE

| Proizvod A | | Proizvod B | | Proizvod C | |
|---|---|---|---|---|---|
| Količina | Cena | Količina | Cena | Količina | Cena |
| (komada) | (n.j.) | (komada) | (n.j.) | (komada) | (n.j.) |
| 0 - 20 | 240 | 0 - 100 | 210 | 0 - 50 | 300 |
| 21 - 60 | 200 | 101 - 150 | 180 | 51 - 100 | 250 |
| 61 - ∞ | 30 | 151 - ∞ | 100 | 101 - ∞ | 100 |

Postavite model!

**R 91.** Neka je $x_{ij}$ broj komada $i$-tog proizvoda po $j$-toj ceni, $i,j=1,2,3$. Model:

$$
\begin{array}{l}
x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33} \geq 0 \\
3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + 2x_{31} + 2x_{32} + 2x_{33} \leq 360 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + 2x_{33} \leq 250 \\
x_{11} \leq 20 \\
x_{12} \leq 40 \\
x_{21} \leq 100 \\
x_{22} \leq 50 \\
x_{31} \leq 50 \\
x_{32} \leq 50 \\
240x_{11}+200x_{12}+30x_{13}+210x_{21}+180x_{22}+100x_{23}+300x_{31}+250x_{32}+100x_{33} = z \to \max
\end{array}
$$

## 2. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi tri artikla ($A_1$, $A_2$ i $A_3$). Tehnički koeficijenti u vezi sa mašinama i sirovinom dati su sledećom tabelom:

| IZVORI ENERGIJE | TEHNI^KI KOEFICIJENTI | | | KAPACITETI |
|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | |
| Mašina I (čas/jedinica) | 1 | 6 | 1 | 18 |
| Mašina II (čas/jedinica) | 3 | 6 | 1 | 70 |
| Sirovina (kg/jedinica) | 2 | 2 | 1 | neograničeno |

Pri utvrđivanju dnevnog plana proizvodnje treba je uzeti u obzir i sledeće uslove:

a) Dnevno treba preraditi najmanje 25 kg sirovine

b) Funkcija troškova, čiji se minimum traži je: $2x_1^2 + x_1 + 50x_2 + 50x_3$,
gde $x_i$ $(i=1,2,3)$ označava količine $A_1$, $A_2$ i $A_3$, respektivno
Odredite optimalni plan proizvodnje, birajući tri jednaka intervala kod linearizacije!

**3. ZADATAK**

Za fabriku F treba odrediti optimalni plan proizvodnje proizvoda A, B i C. Dati su sledeći podaci o uslovima proizvodnje i prodaje:

| U S L O V I   P R O I Z V O D N J E | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mašine | Tehnički koeficijenti (čas/kom) | | | Kapaciteti |
| | A | B | C | |
| $M_1$ | 3 | 2 | 1 | 510 časova |
| $M_2$ | 2 | 1 | 3 | 590 časova |

| U S L O V I   P R O D A J E | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | B | | C | |
| Količina | Cena | Količina | Cena | Količina | Cena |
| 0- 30 | 240 | 0- 40 | 400 | 0- 50 | 360 |
| 31- 50 | 200 | 41-100 | 220 | 51-100 | 260 |
| 51- ∞ | 60 | 101- ∞ | 80 | 101- ∞ | 120 |

**4. ZADATAK**

Pogon za preradu povrća dnevno treba da preradi namanje 18 jedinica povrća u konzerve tipa A, B i C. Za proizvodnju svake jedinice ovih konzervi koristi se 1 jedinica, 3 jedinice i 2 jedinice datog povrća, respektivno. Uređaji fabrike rade po 24 časa dnevno, a angažuju se po 4 časa, 2 časa, odnosno, 2 časa po jedinici konzervi pojedinih tipova, respektivno. Utvrdite dnevni plan proizvodnje uz minimalne troškove, ako je funkcija troškova:

$$x_1^2 + 2x_1 + 24x_2 + 20x_3$$

gde $x_i$ $(i=1,2,3)$ označava broj proizvedenih jedinica A, B i C. Kod linearizacije uzeti tri jednaka intervala!

**5. ZADATAK**

Za jednu fabriku treba sastaviti optimalni plan proizvodnje za tri proizvoda (A, B i C). Ograničavajući uslovi su sledeći:

a) U pogonu $P_1$ treba obraditi proizvode A i B. Obrada traje po jedan mašinski čas po komadu, dok je za ove proizvode rezervisan kapacitet od 200 časova koji se može koristiti u bilo kom stepenu

b) Sirovine S na zalihama ima 300 jedinica, ne mora se sva količina pogtrošiti, a za proizvode A, B i C troši se u količini od 1 jedinice, 1 jedinice i 2 jedinice po komadu, respektivno

c) Zbog tržišnih uslova treba proizvesti najmanje 10 komada proizvoda C, a plasirati se može najviše 60 komada proizvoda A

Odredite optimalni plan proizvodnje uz maksimalan prihod, čija je funkcija:

$$1000x_1 - x_1^2 + 920x_2 + 800x_3 = z$$

gde $x_i$ ($i=1,2,3$) označava broj proizvedenih komada $i$-tog proizvoda. Kod linearizacije uzeti tri jednaka intervala!

**6. ZADATAK**

U jednoj fabrici proizvode se tri proizvoda (A, B i C), pod sledećim uslovima:

a) Količina proizvoda A može biti najviše 60 komada

b) Svaki proizvod se obrađuje na mašini M ukupnog kapaciteta 360 časova, sa utroškom redom: 2 časa, 2 časa i 6 časova po komadu proizvoda.

c) Potrebno je preraditi tačno 180 kg sirovine S. Za jedan komad proizvoda troši se redom 6 kg, 6 kg i 4 kg sirovine.

d) Troškovi proizvodnje su aproksimirani funkcijom: $4x_1^2 - 2x_1 + 10x_2 + 13x_3$, gde su $x_1$, $x_2$ i $x_3$ količine proizvoda A, B i C respektivno.

**1.** Postavite model!

**2.** Izvršite linearizaciju modela **1.** birajući tri jednaka podintervala i postavite polaznu simpleks tabelu!

**3.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti tabele!

**4.** Navedite prednosti i nedostatke metoda primenjenih pod tačkama **2.** i **3.**!

**7. ZADATAK**

U jednom pogonu proizvode se tri proizvoda: $P_1$, $P_2$ i $P_3$. Proizvodnja se odvija pod sledećim uslovima:

a) Za proizvode $P_1$ i $P_2$ koristi se sirovina S, od koje na raspolaganju stoji 380 kg (ne mora se utrošiti). Za jednu jedinicu proizvoda $P_1$ i $P_2$ potrebno je po 2 kg sirovine S

b) Sva tri proizvoda obradjuju se na mašini M. Kapacitet ove mašine u planskom periodu iznosi 600 m. časova i koristi se u bilo kom stepenu. Za jednu jedinicu $P_1$, $P_2$ odnosno $P_3$ potrebno je utrošiti po 1; 1 odnosno 2 m.č. respektivno

c) Zbog ograničenosti tražnje za proizvodom $P_1$ od ovog proizvoda može se proizvesti najviše 120 jedinica

d) Radi boljeg iskorišćenja kapaciteta od proizvoda $P_3$ treba proizvesti najmanje 80 jedinica

**1.** Postavite model ako je cilj maksimalni prihod i ako je funkcija prihoda sledećeg oblika: $z = 9000x_1 - x_1^2 + 20x_2 + 100x_3$, gde $x_i$ označava broj proizvedenih jedinica $i$-tog proizvoda. Postavite model, izvršite linearizaciju (birajući tri jednaka podintervala) i postavite polaznu simpleks tabelu!

**2.** Na koji način se može postići veća tačnost u zadatku pod **1.**?

**3.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite krietrijume otimalnosti!

**4.** Navedite prednosti i nedostatke metoda linearne aproksimacije i kvadratnog programiranja!

**8. ZADATAK**

Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B, C) pod sledećim uslovima:

a) Proizvode treba obraditi na mašinama $M_1$ i $M_2$. Na mašini $M_1$ u toku probne proizvodnje utrošeno je po 12 časova za proizvodnju svakog proizvoda. Za ovo vreme proizvedeno je 4; 2 odnosno 3 komada pojedinih proizvoda respektivno. Na drugoj mašini utrošeno je 10 časova za svaki proizvod i dobijeno je 2; 5 odnosno 2 komada proizvoda respektivno. Kapacitet $M_1$ iznosi 1600 časova, a kapacitet $M_2$ 1800 časova

b) Od proizvoda B može se plasirati najviše 180 komada.

c) Za proizvodnju proizvoda A i C koristi se sirovina S, i to u količinama 12 kg po jedinici proizvoda. Potrebno je preraditi najmanje 1200 kg sirovine

d) Funkcija kriterijuma je: $300x_1 + 3x_2^2 - x_2 + 100x_3 = v \rightarrow \min$

**1.** Postavite model!

**2.** Izvršite linearizaciju (birajući tri jednaka podintervala) i utvrdite jedno moguće rešenje!

**3.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite krietrijume otimalnosti tabele!

## 9. ZADATAK

Sledeći nelinearni model transformišite u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3000$$
$$x_1 + \quad + 2x_3 = 1500$$
$$4x_1^2 - 5x_1 + 3x_2^2 + 2x_2 + 6x_3^2 = v \rightarrow \max$$

## 10. ZADATAK

Dat je sledeći model nelinearnog programiranja :

$$x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 100$$
$$x_1 \quad + 2x_3 \geq 50$$
$$2x_1^2 - x_1 + 3x_2^2 + 5x_2 + 6x_3 = v \rightarrow \min$$

**1.** Transformišite gornji model u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti!

**2.** Koji algoritam se može primeniti za rešavanje modela **1.** pored kvadratnog programiranja?

## 11. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda A, B i C, pod sledećim uslovima:

a) U proizvodnji radi 1200 radnika, koje treba sve uposliti, a po mogućstvu treba zaposliti i veći broj. Normativi su 2 radnika/kom., 4 radnika/kom. i 2 radnika/kom. proizvoda A, B i C, redom

b) Artikli se obrađuju na mašinama $M_1$ i $M_2$. Kapaciteti mašina u časovima i tehnički koeficijenti u čas/kom. su u sledećoj tabeli:

| | A | B | C | Kapaciteti |
|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 2 | 3 | 1 | 2100 |
| $M_2$ | 1 | 1 | 1 | 360 |

c) Troškovi proizvodnje su aproksimirani funkcijom $2x_1^2+0,5x_2^2-x_2+600x_3$, gde $x_1$, $x_2$ i $x_3$ redom označavaju količine A, B i C u kom.

**1.** Odredite optimalni asortiman, birajući tri jednaka intervala kod linearizacije!

**2.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti!

## 12. ZADATAK

Jedna fabrika može da proizvodi artikle: $A_1$, $A_2$, $A_3$ i $A_4$ i da ih plasira na tržištu po cenama od 70, 90, 100, odnosno 80 din/kom. respektivno. Obrada pojedinih artikala vrši se na tri mašine:

| MA[INE | Potreban broj m.č. za izradu 1 komada | | | | Nedeljni kapacitet u m.č. |
|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | |
| Mašina $M_1$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 160 |
| Mašina $M_2$ | 0 | 2 | 1 | 2 | 240 |
| Mašina $M_3$ | 6 | 1 | 2 | 5 | 200 |

**1.** Odredite nedeljni plan proizvodnje fabrike, ako se želi postići maksimalni prihod!

**2.** Odredite interval stabiliteta s obzirom na očekivana kolebanja u vektorima $\underline{c}^T$ i $\underline{b}$!

**3.** Odredite celobrojno rešenje!

**4.** Kakve probleme i modele poznajete iz oblasti celobrojnog programiranja?

**5.** Promenjeni su planski uslovi. Prodajne cene su, u zavisnosti od proizvedenih količina sledeće:

| PROIZVOD $A_1$ | | PROIZVOD $A_2$ | | PROIZVOD $A_3$ | | PROIZVOD $A_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KOLIČINA | CENA | KOLIČINA | CENA | KOLIČINA | CENA | KOLIČINA | CENA |
| 0-20 | 70 | 0-10 | 90 | 0-30 | 100 | 0-10 | 80 |
| 21-40 | 60 | 11-40 | 60 | 31-50 | 50 | 11-20 | 60 |
| 41-∞ | 10 | 41-∞ | 10 | 51-∞ | 10 | 21-∞ | 10 |

Na osnovu izmenjenih uslova prodaje, postavite model i polaznu simpleks tabelu!

**6.** Napišite dual i navedite rešenja duala modela **1.**!

**7.** U kojim fazama se odvija primena matematičkih model u procesu donošenja odluka?

## 13. ZADATAK

U jednom pogonu proizvode se tri proizvoda $P_1$, $P_2$ i $P_3$ pod sledećim uslovima:

a) Za proizvode $P_1$ i $P_2$ koristi se sirovina S, od koje na raspolaganju stoji 1200 kg (ne mora se utrošiti). Za jedinicu proizvoda $P_1$ i $P_2$ potrebno je po 1 kg sirovine S

b) Sva tri proizvoda se obrađuju na mašini M. Kapacitet ove mašine u planskom periodu iznosi 1300 mašinskih časova i koristi se u bilo kom stepenu. Za jednu jedinicu $P_1$, $P_2$ odnosno $P_3$ potrebno je utrošiti po 11, 12 odnosno 12 m.č. respektivno

c) Zbog ograničenosti tražnje za proizvodom $P_1$ od ovog proizvoda se može proizvesti najviše 180 jedinica

d) Funkcija prihoda je sledećeg oblika: $200x_1 - 2x_1^2 + 3x_2 + 30x_3 = z$ gde $x_i$ označava broj proizvedenih jedinica $i$-tog proizvoda $(i=1,2,3)$.

**1.** Postavite model, ako je cilj maksimalni prihod, izvršite linearizaciju (birajući tri jednaka podintervala) i utvrdite jedno moguće rešenje!

**2.** Na koji način se može u principu postići veća tačnost u modelu **1.**?

**3.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti!

## 14. ZADATAK

Treba da se sačini godišnji plan proizvodnje za proizvode $P_i$ (i=1, 2, 3, 4). Prilikom planiranja moraju se uzeti u obzir sledeći uslovi:

a.) Za proizvodnju ovih proizvoda koriste se specijalne sirovine S i to 2, 1, 1 odnosno 3 kg/kom. respektivno; mora se preraditi najmanje 3000 kg S

b.) Kapacitet mašine M (7000 časova) treba iskoristiti 100%. Obrada pojedinih proizvoda zahteva 1, 2, 2 odnosno 1 čas/kom. respektivno

c.) Finalna montaža raspolaže kapacitetom od 4800 časova. Tehnički koeficijenti su 2, 1, 1 odnosno 4 čas/kom.

d.) Kooperantu je potrebno obezbediti najmanje 1000 komada proizvoda $P_3$

e.) Kupci $K_i$ (i=1, 2, 3,...,6) dostavili su porudžbine za 1000, 500, 200, 300, 600 odnosno 400 komada $P_2$. Od navedene količine više se ne može plasirati, ali se porudžbinama ne mora obavezno udovoljiti.

f.) Troškovi proizvodnje se mogu aproksimirati funkcijom:

$$3000x_1 + 0.5x_2^2 + 2x_2 + 3200x_3 + 4x_4^2 = v$$

gde $x_i$ $(i=1,2,3,4)$ označava broj komada $P_i$.

**1.** Postavite model, izvršite linearizaciju, birajući tri jednaka podintervala, i postavite polaznu simpleks tabelu!

**2.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti!

**3.** Navedite specifične probleme koji se javljaju pri rešavanju linearnih modela!

## 15. ZADATAK

Fabrika hemijskih proizvoda želi da sastavi mešavinu od tri organske materije $o_1$, $o_2$ i $o_3$ pod sledećim uslovima:

a.) Mešavina mora sadržavati najmanje 200 jedinica proteina, dok po jedan kilogram pojedinih organskih materija sadrži redom 1, 1 odnosno 1 jedinicu proteina respektivno

b.) U mešavini mora biti najmanje 600 g masti, a po jedan kilogram organske materije sadrži redom 2, 1 odnosno 4 g masti respektivno.

c.) Mešavina ne sme da sadrži više od 60 kg organske materije $o_2$, dok sa druge strane mora sadržavati najmanje 30 kg $o_3$

d.) Funkcija troškova ima sledeći oblik: $53x_1 + 0.2x_2^2 + 2x_2 + 10x_3 = v$

**1.** Na osnovu datih podataka postavite model!

**2.** Izvršite linearizaciju modela **1.**, birajući tri jednaka podintervala i postavite polaznu simpleks tabelu!

**3.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite kriterijume optimalnosti tabele!

**16. ZADATAK**

Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B, C) pod sledećim uslovima:

a) Svaki od navedenih proizvoda se obrađuje na mašini M, i to redom 2 časa, 3 časa i 1 čas po jedinici proizvoda. Ukupan kapacitet mašine je 600 časova

b) Obim proizvodnje proizvoda A može biti najviše za 120 jedinica veći od obima proizvodnje proizvoda B

c) Za proizvodnju proizvoda A, B i C koristi se sirovina S, i to u količinama, redom, 2 kg, 3 kg i 1 kg po jedinici proizvoda. Na zalihama ima 300 kg sirovine i potrebno je utrošiti svu količinu

d) Troškovi proizvodnje se mogu aproksimirati funkcijom

$$10x_1^2 - 2x_1 + 500x_2 + 10x_3 + 3x_3^2$$

gde $x_1$, $x_2$ i $x_3$ označavaju, redom, količine proizvoda A, B i C.

**1.** Postavite model, izvršite linearizaciju (birajući tri jednaka podintervala) i utvrdite jedno moguće rešenje!

**2.** Transformišite model **1.** u model kvadratnog programiranja, postavite polaznu simpleks tabelu i navedite krietrijume optimalnosti!

**3.** Navedite model hiperboličnog programiranja i kriterijume optimalnosti po Martošu!