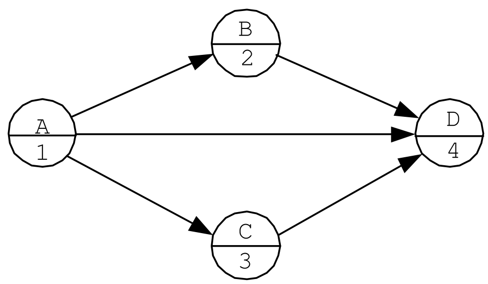
OSNOVNI POJMOVI MREŽNOG PROGRAMIRANJA

U ovom delu biće prikazani neki osnovni tipovi zadataka iz oblasti mrežnog programiranja (ili mrežnog planiranja). Zajednička karakteristika ovih zadataka je da su povezanosti elemenata posmatrane problematike, prezentovani mrežnim dijagramom.

Graf G je definisan sa dva konačna skupa:
- skupom vrhova (čvorova) označenih simbolima
- skupom lukova, napr. (A-B, A-C, B-D, C-D); luk predstavlja uređen par vrhova (i,j), što znači da vrh i prethodi vrhu j; na primeru na sledećoj slici definisani su lukovi (1,2), (1,3), (1,4), (2,4) i (3,4).

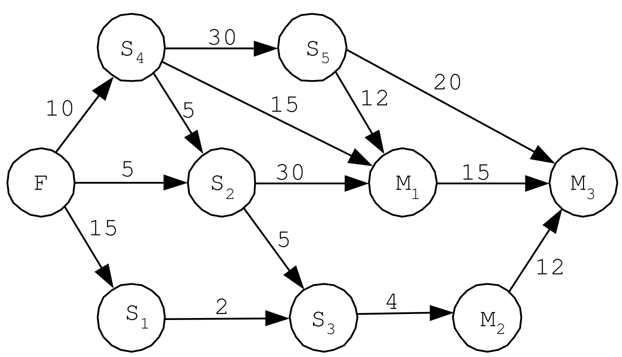
Slika 36.
Graf



Mrežni dijagram u matematičkom smislu označava konačan orijentisan graf, bez kružnog puta, u kome svakom luku pripada i merni broj u_{ij}.

1. PROBLEM NAJKRAĆEG PUTA

PRIMER 114. Jedna fabrika ima tri magacina (M_i, i=1,2,3), na različitim lokacijama. Sledeći mrežni dijagram prikazuje putnu mrežu i udaljenosti od fabrike F, do pojedinih magacina, preko raskrsnica R_j, j=1,2...,5.



Udaljenosti na gornjoj mreži date su u km.

Odredite najkraće udaljenosti od fabrike do pojedinih magacina!

R 114. Tok rešavanja zadataka prikazano je tabelom na sledećoj strani.Najkraće udaljenosti su sledeće:

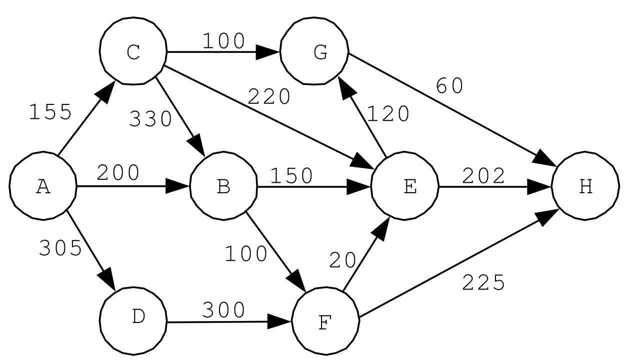
Najkraći put od fabrike do magacina M_1 iznosi 25 km, a vodi preko vrha S_4. (oznaka • u tabeli)

Najkraći put od fabrike do magacina M_2 iznosi 14 km, a vodi preko vrhova S_2 i S_3. (oznaka * u tabeli)

Najkraći put od fabrike do magacina M_3 iznosi 26 km, a vodi preko vrhova S_2, S_3 i M_2. (oznaka + u tabeli)

s_j		F	S_1	S_4	S_2	S_3	M_1	S_5	M_2	M_3
0	F	+*•	***15***	***10***	***5***					
15	S_1					2				
10	S_4			•	5		***15***	30		
5	S_2				+*	***5***	30			
10	S_3					+*			***4***	
25	M_1						•	***12***		15
37	S_5									20
14	M_2								+*	***12***
26	M_3									+

PRIMER 115. Odredite najkraći put na osnovu sledećeg mrežnog dijagrama:



Udaljenosti na gornjoj mreži date su u stotinama metara

R 115.

s_j		A	C	B	D	F	E	G	H
0	A	+	***155***	***200***	***305***				
155	C		+	330				***100***	
200	B					***100***	150	220	
305	D					300			

300	F						***20***		225
320	E							120	202
255	G							+	***60***
315	H								+

Najkraći put vodi preko vrhova A-C-G-H i iznosi 315 jedinica (stotina metara).

2. ANALIZA VREMENA – PROBLEM IZNALAŽENJA KRITIČNOG PUTA

Analiza vremena znači određivanje parametara kontrolisanja vremenskog odvijanja projekta, s ciljem iznalaženja optimalnog tempa odvijanja aktivnosti i obvezbeđenja minimalnog vremena završetka celokupnog projekta. Osnovicu analize vremena čini takav mrežni dijagram u kojem su pojedini događaji (vrhovi) povezani raznim aktivnostima (lukovima).

Aktivnost je proces koji se odigrava u vremenu, dok je ***događaj*** trenutak početka ili završetka aktivnosti.

Kritični put je niz međusobno povezanih aktivnosti koje se obavljaju između početnog i završnog događaja, a imaju ukupno najduže vreme trajanja. Kritični put je najduži put u mreži.

Analizu vremena u nastavku ćemo vršiti po metodima CPM (Critical Path Method – metod kritičnog puta) i PERT (Program Evaluation and Review Technic – tehnika procene i revizije programa).

METOD CPM (Critical Path Method)

Ovaj metod se primenjuje ako se raspolaže tačno utvrđenim (normiranim) vremenima trajanja aktivnosti (t_{ij}). Uvedimo sledeće simbole:

t_i^0 - najraniji početak aktivnosti A_{ij}

t_j^0 - najraniji završetak aktivnosti A_{ij}

t_i^1 - najkasniji početak aktivnosti A_{ij}

t_j^1 - najkasniji završetak aktivnosti A_{ij}

Vremenske rezerve se javljaju kod nekritičnih aktivnosti i pokazuju za koliko se može odložiti početak, odnosno završetak pojedinih aktivnosti,a da to ne utiče na krajnji rok završetka projekta. Postoji više vrsta rezervi, ovde ćemo prikazti ukupne i slobodne.

Ukupne vremenske rezerve aktivnosti A_{ij} se računaju po obrascu:

$$r_{ij}^u = t_j^1 - (t_{ij} + t_i^0)$$

Slobodne vremenske rezerve se računaju kao:

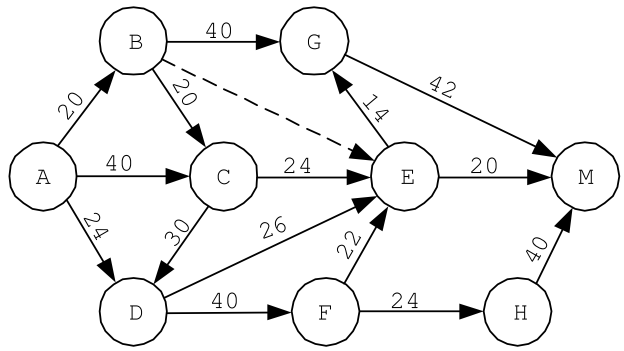
$$r_{ij}^s = t_j^0 - (t_{ij} + t_i^0)$$

1. **ZADATAK**

Povezanosti i vremena trajanja (u danima) aktivnosti koje se javljaju prilikom izgradnje jedne stambene zgrade prikazuje sledeći mrežni dijagram.

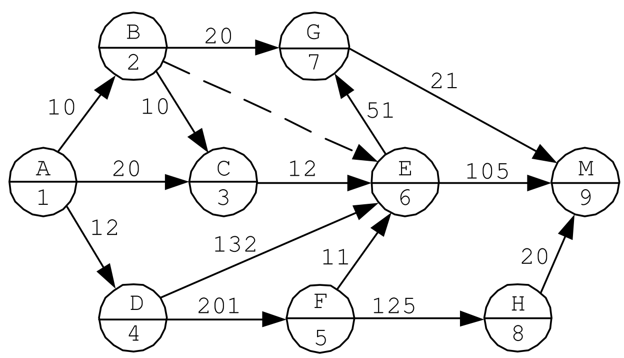
1. Odredite kada se može najranije završiti ova zgrada!

2. Odredite ukupne i slobodne vremenske rezerve



PRIMER 117. Povezanosti i vremena trajanja (u danima) aktivnosti koje se javljaju prilikom izgradnje jedne stambene zgrade prikazuje mrežni dijagram na sledećoj strani. Odredite kada se najranije može završiti gradnja ove zgrade! Odrediti kritični put (niz aktivnosti najdužeg trajanja koje određuju najraniji mogući rok završetka objekta)!

Napomena Slovne oznake predstavljaju početke, odnosne završetke pojedinih aktivnosti, a izvršena je numeracija vrhova (od 1 do 9), tako da manji redni broj vrha uvek prethodi većem. Iznad strelica prikazana su vremena trajanja aktivnosti. Isprekidana strelica označava tzv. fiktivnu aktivnost dužine trajanja 0 (nula), a zapravo ukazuje na uslovljenost početka naredne aktivnosti završetkom prethodne.



R 117.

Najranij i rokovi		A	B	C	D	F	E	G	H	M
$t_1^0=0$	A 1		10	20	12					
$t_2^0=10$	B 2			10			0	20		

$t_3^0=20$	C 3						12			
$t_4^0=12$	D 4					201	132			
$t_5^0=213$	F 5						11		125	
$t_6^0=224$	E 6							51		105
$t_7^0=275$	G 7									21
$t_8^0=338$	H 8									20
$t_9^0=358$	M 9									
Najkasniji rokovi		$t_1^1=0$	$t_2^1=23$ 1	$t_3^1=24$ 1	$t_4^1=12$	$t_5^1=21$ 3	$t_6^1=25$ 3	$t_7^1=33$ 7	$t_8^1=33$ 8	$t_9^1=35$ 8
		*			*	*			*	*

Izgradnja se može završiti u roku od 358 dana. Kritični put vodi preko događaja A-D-F-H-M (označno u tabeli sa *)

Napomena Najraniji rokovi završetaka aktivnosti su računati istim postupkom kao i dužine rastojanja kod određivanja najdužeg puta. Najkasniji rokovi završetaka aktivnosti se računaju po obrascu:

$t_i^1 = \min\limits_j \left\{ t_j^1 - t_{ij} \right\}$, pri čemu je $i<j$, $j=n,n-1,...,2$; $i=n-1,n-2,...,1$

Računanje se sprovodi počev od podatka $t_n^1 = T_p = t_n^0$, gde T_p označava najraniji završetak celog objekta:

$t_9^1 = T_p = t_9^0 = 358$

$t_8^1 = t_9^1 - t_{89} = 358-20=338$

$t_7^1 = t_9^1 - t_{79} = 358-21=337$

$t_6^1 = \min\{t_9^1 - t_{69},\ t_7^1 - t_{67}\} = \min\{358-105,\ 337-51\} = 253$

$t_5^1 = \min\{t_8^1 - t_{58},\ t_6^1 - t_{56}\} = \min\{338-125,\ 253-11\} = 213$

$t_4^1 = \min\{t_5^1 - t_{45},\ t_6^1 - t_{46}\} = \min\{213-201,\ 253-132\} = 12$

$t_3^1 = t_6^1 - t_{36} = 253-12=241$

$t_2^1 = \min\{t_7^1 - t_{27},\ t_6^1 - t_{26},\ t_3^1 - t_{23}\} = \min\{337-20,\ 253-0,\ 241-10\} = 231$

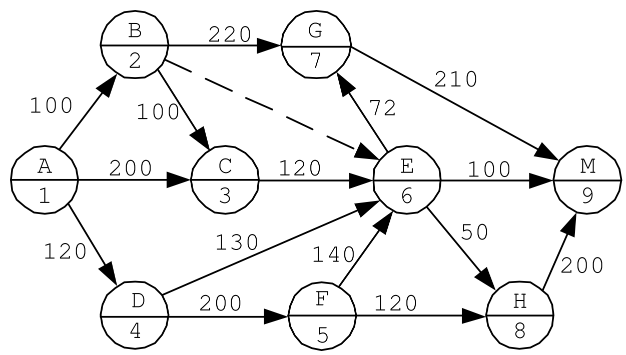
$t_1^1 = \min\{t_4^1 - t_{14},\ t_3^1 - t_{13},\ t_2^1 t_{12}\} = \min\{12-12,\ 241-20,\ 231-10\} = 0$

Kritični put se dobija upoređivanjem najranijih i najkasnijih rokova događaja; na kritičnom putu ovi rokovi su jednaki.

DOGAĐAJ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Najraniji rokovi	0	10	20	12	21 3	22 5	27 5	33 8	358
Najkasniji rokovi	0	23 1	24 1	12	21 3	25 3	33 7	33 8	358

RAZLIKA	0			0	0			0	0
KRITIČNI PUT	A———————D——F———-—————H––—M								

PRIMER 118. Na sledećem dijagramu prikazane su aktivnosti u vezi s izgradnjom jedne zgrade. Vremena trajanja aktivnosti date su u danima.



Odredite kada se može najranije završiti ova zgrada i izračunajte vremenske rezerve!

R 118.

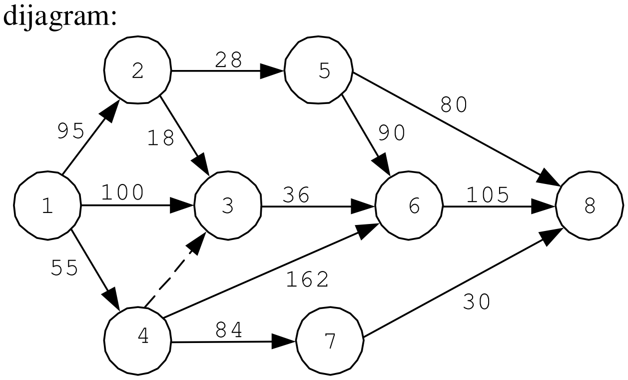
Najraniji rokovi		A	B	C	D	F	E	G	H	M
0	A 0		100	200	120					
100	B 1			100			0	220		
200	C 2						120			
120	D 3					200	130			
320	F 4						140		120	
460	E 5							72	50	100
532	G 6									210
510	H 7									200
742	M 8									

Najkasniji rokovi	0	240	340	120	320	460	532	542	742
	*			*	*	*	*		*

U sledećoj tabeli prikazan je postupak izračunavanja vremenskih rezervi za dati primer.

Aktivnost	Vreme trajanja	Najraniji početak	Najraniji završetak	Najkasnij i početak	Najkasnij i završetak	Ukupna vremens ka rezerva	Slobodna vremenska rezerva
i – j	t_{ij}	t_i^0	t_j^0	t_i^1	t_j^1	r_{ij}^u	r_{ij}^s
A-B	100	0	100	0	240	140	0
A-C	200	0	200	0	340	140	0
A-D	120	0	120	0	120	0	0
B-C	100	100	200	240	340	140	0
B-E	0	100	460	240	460	360	360
B-G	220	100	532	240	532	212	212
C-E	120	200	460	340	460	140	140
D-F	200	120	320	120	320	0	0
D-E	130	120	460	120	460	210	210
F-E	140	320	460	320	460	0	0
F-H	120	320	510	320	542	102	70
E-H	50	460	510	460	542	32	0
E-M	100	460	742	460	742	182	182
H-M	200	510	742	542	742	32	32
E-G	72	460	532	460	532	0	0
G-M	210	532	742	532	742	0	0

PRIMER 119. Odredite kad se najranije može predati objekat čiju gradnju pokazuje sledeći mrežni dijagram:



R 119. Objekat se može predati najranije u roku od 322 dana, a kritični put vodi preko događaja 1-4-6-8. Određivanje kritičnog puta prikazano je sledećom tabelom.

Najraniji		1	2	4	3	5	6	7	8

0	1		95	55	10				
95	2				18	28			
55	4				0		16	84	
113	3						36		
123	5						90		80
217	6								10
139	7								30
322	8								
Najkasniji		0	99	55	181	127	217	292	322
		*		*			*		*

Sledeća tabela sadrži ukupne vremenske rezerve:

$i - j$	t_{ij}	t_i^0	t_j^1	r_{ij}^u
1-2	95	0	99	4
1-4	55	0	55	0
1-3	100	0	181	81
2-3	18	95	181	68
2-5	28	95	127	4
4-3	0	55	181	126
4-6	162	55	217	0
4-7	84	55	292	153
3-6	36	113	217	68
5-6	90	123	217	4
5-8	80	123	322	119
6-8	105	217	322	0
7-8	30	139	322	153

METOD PERT*

Ovaj metod se primenjuje u analizi vremena kada nije moguće precizno normirati vremena trajanja aktivnosti, nego se vrši njihova procena. Za svaku aktivnost se procenjuju:

- optimističko (najkraće) vreme trajanja a_{ij}
- najverovatnije vreme trajanja m_{ij}
- pesimističko (najduže) vreme trajanja b_{ij}

Matematičko očekivano vreme se izračunava na osnovu procenjenih vremena trajanja tzv. trajanja aktivnosti A_{ij} po formuli:

$$t_{ij}^e = \frac{a_{ij} + 4 \cdot m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

Varijansa se određuje za svako očekivano vreme:

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$$

Uvedimo sledeće oznake:

* Program Evaluation and Review Technics, tehnika procene i kontrole programa

T_E najraniji rok zbivanja događaja

T_L najkasniji rok zbivanja događaja

$R_k = T_L - T_E$ vremenska rezerva, $k=1,2,...,n$

$$Z = \frac{T_L - T_E}{\sqrt{\sigma^2_{T_E}}}$$ faktor verovatnoće

za $Z = 0$ verovatnoća ostvarenja događaja je 50%

za $Z < -3$ verovatnoća ostvarenja događaja je blizu nule

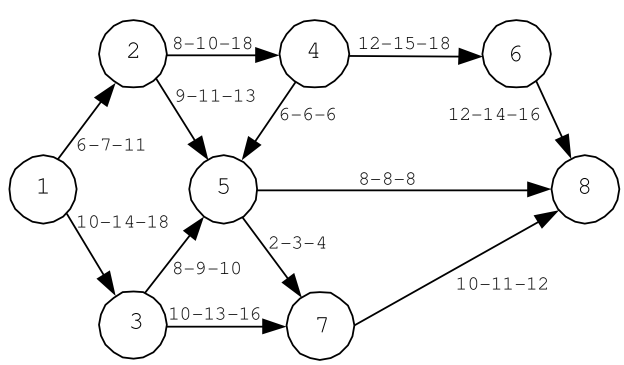
za $Z > 3$ verovatnoća ostvarenja događaja je blizu 100%

PRIMER 121. U sledećoj tabeli prikazana su procenjena optimistička, najverovatnija i pesimistička vremena trajanja aktivnosti koje se javljaju kod izgradnje jednog objekta:

Aktivnosti	Vreme trajanja u danima		
	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1-2	6	7	11
1-3	10	14	18
2-4	8	10	18
2-5	9	11	13
3-5	8	9	10
3-7	10	13	16
4-6	12	15	18
4-5	6	6	6
5-7	2	3	4
5-8	8	8	8
6-8	12	14	16
7-8	10	11	12

1. Konstruišite mrežni dijagram obavljanja aktivnosti!
2. Odredite kada se može najranije završiti izgradnja?
3. Utvrdite vremenske rezerve!
4. Kolika je verovatnoća da će se izgradnja završiti u roku od 90 dana?

R 121.1. Mrežni dijagram je dat sledećom shemom:



R 121.2. Na osnovu podataka sa mreže izračunate vrednosti matematičko očekivanog vremena trajanja aktivnosti i varijansi date su u sledećoj tabeli:

A_{ij}	t_{ij}^{e}	σ_{ij}^{2}
1-2	7,5	25/36
1-3	14,0	16/9
2-4	11,0	25/9
2-5	11,0	4/9
3-5	9,0	1/9
3-7	13,0	1
4-5	6,0	0
4-6	15,0	1
5-7	3,0	1/9
5-8	8,0	0
6-8	14,0	4/9
7-8	11,0	1/9

U sledećoj tabeli prikazane su izračunate vrednosti najranijih i najkasnijih rokova zbivanja događaja kao i varijanse najranijih rokova. Postupak računanja je sledeći:

- u tabelu se prvo unose očekivana vremena trajanja sa odgovarajućom varijansom, za sve aktivnosti,

- najraniji i najkasniji rokovi se računaju po postupku prikazanom kod metoda CPM,

- paralelno sa izračunavanjem najranijih rokova računaju se i pripadajuće varijanse, sumirajući uvek izabranom vremenu pripadajuću varijansu.

T_E	$\sigma_{T_E}^{2}$		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1		7,5 25/36	14 16/9					
7,5	25/36	2				11 25/9	11 4/9			
14	16/9	3					9 1/9		13 1	
18,5	125/36	4					6 0	15 1		
24,5	125/36	5							3 1/9	8 0
33,5	161/36	6								14 4/9
27,5	129/36	7								11 1/9
47,5	177/36	8								
	T_L		0	7,5	23,5	18,5	33,5	33,5	36,5	47,5
			*	*		*		*		*

Izgradnja se može završiti najranije u roku od 47,5 dana, a kritični put vodi preko događaja 1-2-4-6-8.

R 121.3. Vremenske rezerve za kritične događaje jednake su 0, a za nekritične događaje su: R_3=23,5−14=9,5 R_5=33,5−24,5=9,0 R_7=36,5−27,5=9,0

R 121.4. Faktor verovatnoće je:

$$z=\frac{90-47,5}{\sqrt{\frac{177}{36}}}=\frac{42,5}{2,217...}\approx 19,17>3$$

što znači da je verovatnoća da će objekat biti završen za 90 dana blizu 100%.

1. ZADATAK

Ocenjena vremena trajanja aktivnosti, koje se javljaju kod izgradnje jednog objekta su data u narednoj tabeli.

1. Nacrtajte mrežni dijagram i odredite kad se može najranije završiti izgradnja?
2. Kolika je verovatnoća da se izgradnja može završiti u roku od 260 dana?
3. Odredite vremenske rezerve!

AKTIVNOSTI	VREME TRAJANJA (u danima)		
	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
A-B	18	20	22
A-C	17	18	19
A-D	11	12	20
B-C	16	18	20
B-E	17	18	19
D-F	13	14	15
D-G	10	12	14
C-F	80	90	100
E-F	13	13	13
E-H	16	17	18
F-H	10	12	14
F-G	15	16	17
G-H	25	27	29

PRIMER 122. Optimistička, verovatna i pesimistička vremena trajanja aktivnosti koje se javljaju prilikom gradnje jednog objekta prikazuje sledeća tabela:

Aktivnosti	Vreme trajanja u danima		
A_{ij}	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
0-1	7	10	13
1-2	23	26	29
1-3	5	6	7
1-4	8	10	12
2-6	23	24	25
3-5	13	13	13
3-6	15	20	25
4-5	12	14	16
4-7	10	12	14

5-6	12	14	16
5-8	6	10	14
6-8	27	28	29
7-8	13	23	33

1. Odredite kritični put!

2. Kolika je verovatnoća da se završetak izgradnje može skratiti za 15 dana u odnosu na vreme trajanja izračunato u prethodnoj tački?

3. Odredite vremenske rezerve!

R 122.1. U tabeli na sledećoj strani prikazano je izračunavanje kritičnog puta. Kritični put vodi preko događaja 0-1-2-6-8 a dužina trajanja (najranije vreme završetka objekta) iznosi 88 dana.

R 122.2. Verovatnoća da se izgradnja može skratiti za 15 dana je približno 0%:

$$Z = \frac{(88-15)-88}{\sqrt{\frac{20}{9}}} = \frac{-15}{1,490...} \approx -10,06 < -3$$

R 122.3. Vremenske rezerve su:

$R_3 = 33 - 16 = 17$ $\quad$ $R_4 = 34 - 20 = 12$

$R_5 = 46 - 24 = 12$ $\quad$ $R_7 = 65 - 32 = 33$

Utvrđivanje kritičnog puta:

T_E	$\sigma^2_{T_E}$		1	2	4	3	5	6	7	8	9
0	0	1		10 1							
10	1	2			26 1	6 1/9	10 4/9				
36	2	4							24 1/9		
16	10/9	3						13 0	20 25/9		
20	13/9	5						14 4/9		12 4/9	
34	17/9	6							14 4/9		10 16/9
60	19/9	7									28 1/9
32	17/9	8									23 25/9
88	20/9	9									
	T_L		0	10	36	33	32	46	60	65	88

		*	*	*				*		*

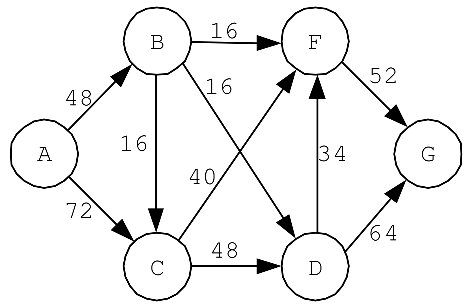
3. PROBLEM MAKSIMALNOG TOKA

Kod problema tokova podaci na lukovima mreže predstavljaju ***propusnu moć***, tj. mogući najveći tok između dva vrha. Kao zadatak, postavlja se određivanje maksimalnog mogućeg toka između početnog i krajnjeg vrha, uzimajući u obzir pojedinačne kapacitete (u_{ij}) i sve moguće puteve.

Algoritam rešavanja zadatka ima sledeće korake:

- 1. korak - Određuje se jedan ***put*** (p_k) na grafu od ulaza do izlaza tako da se pođe od ulaznog vrha, i kod svakog sledećeg vrha do kojeg se stigne, skreće se najviše na levo.
- 2. korak - Pošto je određen prvi put (p_1), propustimo po njemu maksimalni tok za taj put, koji je određen najmanjim od kapaciteta ($u_1=\min\{u_{ij}\}$) lukova koji pripadaju tom putu. Utvrđena minimalna vrednost se oduzima od kapaciteta svih lukova na tom putu. Lukovi kojima je preostali kapacitet jednak nuli nazivaju se saturiranim lukovima, te se oni brišu sa grafa; preostaje tzv. parcijalni graf.
- 3. korak - Koraci 1. i 2. se ponavljaju na uzastopno dobijenim parcijalnim grafovima, sve dok se mogu naći putevi koji ne sadrže saturirani luk (to su tzv. nesaturirani putevi). Time su određeni kapaciteti u_k puteva p_k.
- 4. korak - Ako je nakon uzastopnih ponavljanja koraka 1. i 2. dobijen parcijalni graf koji ne sadrži ni jedan nesaturirani put, tada se iznalazi eventualni nesaturirani ***lanac*** na parcijalnom grafu. Lanac se sastoji od niza lukova koji vode od ulaza do izlaza, i to tako da se uzimaju u obzir:
  (i) s jedne strane lukovi (potpuno slobodni ili delimično iskorišćeni) sa datim smerom (koji je označen strelicom) i svojim preostalim slobodnim kapacitetom,
  (ii) a sa druge i lukovi (delimično iskorišćeni) sa smerom koji je obratan u odnosu na njihov dati smer ali sa iskorišćenim iznosom kapaciteta (intenzitetom toka na tom luku).
  Maksimalni tok u_k na lancu l_k je najmanji od svih iznosa slobodnih kapaciteta lukova tipa **(i)** i iskorišćenih kapaciteta lukova tipa **(ii)**. Određivanjem lanca, zapravo vrši se modifikacija ranije utvrđenih puteva.
- 5. korak - Korak 4. se ponavlja sve dok se ukupan tok može povećati po nekom novom lancu. Ako više ne postoji nesaturirani lanac, tada je računanje završeno.
- Maksimalni tok sistema predstavlja zbir svih kapaciteta puteva i lukova.

PRIMER 123. Odredite maksimalni tok na osnovu sledećeg grafa:

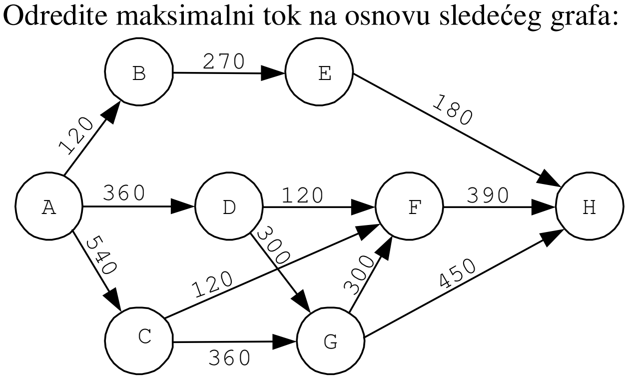


R 123.

Putevi	Kapaciteti puteva
p_1 = {A,B,F,G}	u_1=min{48,16,52}=16
p_2 = {A,B,D,F,G}	u_2=min{32,16,34,36}=16
p_3 = {A,B,C,F,G}	u_3=min{16,16,40,20}=16
p_4 = {A,C,F,G}	u_4=min{72,24,4}=4
p_5 = {A,C,F,G}	u_5=min{68,48,64}=48
Lanac	Kapacitet lanca
l_1 = {A,C,F,D,G}	u_6=min{20,20,16,16}=16
Maksimalni tok sistema	116

Napomena Kod određivanja lanca l_1 promenjena je orijentacija luka između vrhova D i F. Nakon određivanja kapaciteta svih utvrđenih puteva, iskorišćeni kapacitet (intenzitet toka) luka D→F iznosi 16, što ujedno predstavlja slobodan kapacitet luka F→D kod određivanja mogućeg najvećeg toka lanca.

PRIMER 124. Odredite maksimalni tok na osnovu sledećeg grafa:



R 124.

Putevi	Kapaciteti puteva
p_1 = {A,B,E,H}	u_1=min{120,270,180}=120
p_2 = {A,D,F,H}	u_2=min{360,120,390}=120
p_3 = {A,D,G,F,H}	u_3=min{240,300,300,270}=240
p_4 = {A,C,F,H}	u_4= in{540,120,30}=30
p_5 = {A,C,G,H}	u_5=min{510,360,450}=360

Lanac	Kapacitet lanca
l_1 ={A,C,F,G,H}	u_6=min{150,90,240,90}=90
Maksimalni tok sistema	960

1. ZADATAK

U sledećoj tabeli dati su podaci o propusnoj moći putne mreže između pojedinih mesta. Nacrtajte mrežni dijagram i odredite propusnu moć putne mreže!

Put	Propusna moć
A - B	120
A - C	540
A - D	360
B - E	270
C – F	120
C - G	360
D - F	120
D - G	300
E - H	180
G - F	300
G - H	450
F - H	390