

CELOBROJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

3.1. MODELI CELOBROJNOG PROGRAMIRANJA

Svaki matematički model, sa funkcijom kriterijuma minimuma ili maksimuma, u kojem bar jedna primarna promenljiva mora biti celobrojna naziva se matematičkim modelom celobrojnog programiranja. Modele u kojima je zahtev za celobrojnošću postavljen samo za neke od promenljivih nazivamo modelima *mešovito celobrojnog programiranja*. Ako sve primarne promenljive mogu uzeti vrednosti samo iz skupa celih brojeva, tada se radi o *čistom celobrojnom programiranju*. *Linearni celobrojni modeli* uz uslov celobrojnosti (diskretnosti), sadrže samo linearne relacije. Posebna klasa linearnih celobrojnih su *modeli binarnog programiranja* (ili 0-1 programiranja) u kojima vrednosti promenljivih mogu biti samo nula ili jedan. Kod nekih problema vrednost promenljive nula može imati značenje “ne”, dok jedan znači “da”.

3.2. SPECIJALNI ZADACI CELOBROJNOG PROGRAMIRANJA

Postoji široka lepeza problema u kojima je logičan zahtev celobrojnosti (npr. broj zaposlenih, mašina ili građevinskih objekata, zatim, obim proizvodnje proizvoda sa pojedinačno visokim vrednostim i sl.). Ovde ćemo navesti nekoliko od poznatijih problema koji se formulišu u vidu modela celobrojnog programiranja, kao što su npr. zadatak trgovačkog putnika, zadatak o rancu, problem asignacije i zadatak investiranja, koji imaju tipičan naziv a i sadržaj.

ZADATAK TRGOVAČKOG PUTNIKA

Polazeći iz nekog nultog grada trgovački putnik treba da obiđe n novih gradova, pri čemu su poznata rastojanja među gradovima. Trgovački putnik treba da obiđe sve gradove birajući takav redosled da ukupno pređeni put bude minimalan.

ZADATAK O RANCU

Neka je dat skup predmeta različitih težina i različitih vrednosti. Opšti zadatak ranca se sastoji u izboru takvog podskupa predmeta, kojim se ranac date nosivosti popunjava tako, da ukupna vrednost predmeta u rancu bude maksimalna. Kod višedimenzionalnog zadatka o rancu takođe se vrši popunjavanje nekog sredstva predmetima tako, da se postigne maksimalna njihova vrednost, pri čemu su postavljena dva ili više ograničenja, npr. kod teretnih brodova se radi o limitiranosti kako ukupne zapremine, tako i ukupne težine.

PROBLEM ASIGNACIJE

Problem asignacije znači raspoređivanje datog broja izvršilaca (mašina, radnika i sl.) za izvršenje istog broja radnih zadataka, pri čemu svi izvršiocu mogu pristupiti bilo kom radnom zadatku, ali ih izvršavaju sa različitim efektivnostima ili troškovima. Raspoređivanje se vrši u vidu 1-1, što znači da se svakom izvršiocu dodeljuje jedan i samo jedan zadatak a svakom zadatku pripada jedan i samo jedan izvršilac. Cilj se postiže takvim rasporedom kojim se ostvaruje ili maksimalna efektivnost ili minimalni troškovi. Ako promenljiva x_{ij} označava dodeljivanje i -tom izvršiocu j -tog zadatka, c_{ij} su troškovi te relacije i n je ukupan broj izvršilaca i zadataka, tada model asignacije glasi:

$$\begin{aligned}x_{ij} &\geq 0, \quad x_{ij} \in \{0,1\} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min\end{aligned} \tag{1}$$

ZADATAK INVESTIRANJA

Pretpostavimo da investitor raspolaže sa D dinara investicionih sredstava koje treba uložiti u realizaciju svih ili nekih od n različitih projekata P_j , $j=1, 2, \dots, n$, pri čemu za projekat P_j treba uložiti d_j dinara, a donosi prinos (ili diskontovanu vrednost budućih neto efekata) od p_j dinara. Cilj je realizovati projekte tako da utrošena investiciona sredstva budu najviše D dinara, a da se ostvare maksimalni ukupni efekti. Neka promenljiva x_j označava realizaciju projekta P_j , uz uslov $x_j \in \{0,1\}$, što znači da ova promenljiva može biti vrednosti **nula** (ne prihvata se investiciona mogućnost) ili **jedan** (odgovarajući projekat će biti realizovan). U modelu programiranja uslov $x_j \in \{0,1\}$ se može izraziti putem sistema ograničenja, koji se sastoji od uslova o nenegativnosti $x_j \geq 0$, gornjeg limita $x_j \leq 1$ i uslova o celobrojnosti $x_j = [x_j]$. Model za izbor investicionih mogućnosti glasi:

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \quad x_j = [x_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n d_j x_j &\leq D \\ x_j &\leq 1, \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j &\rightarrow \max \end{aligned} \tag{2}$$

Osnovni model za izbor investicionih mogućnosti se može proširiti dodatnim specijalnim uslovima. Neki od ovih uslova se odnose na relacije između dve date investicione mogućnosti, označimo ih sa P_e i P_f . Moguće kombinacije vrednosti odgovarajućih varijabli su:

R. br.	x_e	x_f
1.	1	1
2.	1	0
3.	0	1
4.	0	0

- Ako se realizacije investicionih mogućnosti P_e i P_f međusobno isključuju (npr. dva projekta za isti objekat), tada važe samo 2., 3. i 4. kombinacija vrednosti, pa se model (2) modifikuje uvođenjem dodatnog ograničenja $x_e + x_f \leq 1$ dok ograničenja $x_e \leq 1$ i $x_f \leq 1$ postaju suvišna.
- Ako se radi o vezanim investicijama u smislu da realizacija projekta P_e povlači

obavezu realizacije projekta P_f , dok se projekat P_f može realizovati i bez P_e , tada je 2. kombinacija vrednosti nemoguća. U ovom slučaju modifikacija modela (2) se sastoji u uvođenju dodatnog ograničenja $x_e \leq x_f$, pri tome se zadržava ograničenje $x_f \leq 1$, a ograničenje $x_e \leq 1$ postaje suvišno.

PRIMER 76. U jednoj opštini na raspolaganju je 60 milijardi dinara za izgradnju vodovodne i kanalizacione mreže u naseljima N_1 , N_2 i N_3 . Analiza postojećeg stanja i mogućih efekata od investicija dala je sledeće rezultate (podaci u milijardama dinara):

	VODOVOD			KANALIZACIONA MREŽA				
	N_1	N_2	N_3	N_1		N_2	N_3	
				P_1	P_2	P_1	P_1	P_2
Potrebna sredstva	0	20	5	10	30	10	15	15
Očekivani efekti	0	10	2	15	10	15	10	15

P_i , $i=1,2$, označava projekat za izgradnju. Ako je za izgradnju jedne mreže izrađeno više projekata, treba realizovati samo jedan. Pri utvrđivanju plana izgradnje treba uzeti u obzir i sledeće uslove:

- predviđena sredstva od 5 milijardi dinara za izgradnju vodovodne mreže u naselju N_3 obavezno se moraju utrošiti,
- stanovnici naselja N_2 predlažu da se u njihovom naselju izgradnja vrši po sledećim varijantama: a) da se izgradi i vodovodna i kanalizaciona mreža, 2) da se izgradi samo vodovodna mreža, ili 3) da se ne izgradi ni vodovod ni kanalizacija. Postavite model plana gradnje mreža, uz maksimalne ukupne efekte!

R 76. Definišimo sledećih sedam varijabli:

- x_1 izgradnja vodovodne mreže u naselju N_2
- x_2 izgradnja vodovodne mreže u naselju N_3
- x_3 izgradnja kanalizacione mreže u naselju N_1 po projektu P_1
- x_4 izgradnja kanalizacione mreže u naselju N_1 po projektu P_2
- x_5 izgradnja kanalizacione mreže u naselju N_2 po projektu P_1
- x_6 izgradnja kanalizacione mreže u naselju N_3 po projektu P_1
- x_7 izgradnja kanalizacione mreže u naselju N_3 po projektu P_2

Model:

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0, \quad x_j = [x_j], \quad j=1, 2, \dots, 7 \\
 & 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 30x_4 + 10x_5 + 15x_6 + 15x_7 \leq 60 \\
 & \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad \quad x_2 = 1 \\
 & \quad \quad \quad x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad \quad x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & -x_1 + x_5 \leq 0 \\
 & 10x_1 + 2x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 10x_6 + 15x_7 \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 57.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	1.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000
X4	0.000000	5.000000
X5	1.000000	0.000000
X6	0.000000	5.000000
X7	1.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	25.000000
4)	0.000000	2.000000
5)	0.000000	15.000000
6)	0.000000	15.000000
7)	0.000000	15.000000

NO. ITERATIONS= 4

3.3. PROBLEMI REŠAVANJA MODELA CELOBROJNOG PROGRAMIRANJA

Prilikom rešavanja modela iz oblasti celobrojnog programiranja primenjuje se takav pristup pri kojem se u prvom koraku reši model bez zahteva celobrojnosti, dakle kao kontinuelni model, pa se dobijena rešenja zaokrugle na najbliži ceo broj. Ovakva gruba

aproksimacija celobrojnog optimalnog rešenja je ponekad i prihvatljiva sa praktičnog stanovišta, kada se radi npr. proizvodima male pojedinačne vrednosti i kada su vrednosti varijabli relativno velike u odnosu na grešku zaokrugljivanja. S druge strane, međutim, u opštem slučaju mogu se pojaviti dva problema s ovim postupcima:

- zaokrugljeno rešenje nije elemenat skupa mogućih rešenja
- zaokrugljeno rešenje jeste elemenat skupa mogućih rešenja, ali u tom skupu postoji i bolje celobrojno rešenje

Neka za gornju tvrdnju kao ilustracija posluži sledeći primer:

PRIMER 81. Jedna mesna zajednica raspolaže sa 17 miliona dinara investicionih sredstava, koja se mogu uložiti u izgradnju omladinskog doma, obdaništa, osnovne škole i vodovodne mreže na onoj teritoriji gde će biti podignuta i osnovna škola. Za svaku investicionu mogućnost izrađeno je više alternativnih projekata i utvrđeno je kolika sredstva bi trebalo uložiti u realizaciju pojedinih projekata. Kvantifikovani su budući efekti koji bi se mogli postići realizacijom određenog projekta. Ovi podaci su prikazani sledećom tabelom:

Investicione mogućnosti	Omladinski dom		Obdanište		Osnovna škola			Vodovod
Projekti	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_4
Potrebna sredstva po projektima u milionima dinara	2	3	2	3	6	8	8	4
Očekivani efekti	6	8	9	5	4	8	7	9

Potrebno je uzeti u obzir da ako bude izgrađena osnovna škola, tada se obavezno mora izgraditi i vodovod, ali izgradnja vodovoda ne povlači obavezu izgradnje osnovne škole. Koje objekte treba izgraditi, ako je cilj maksimalni budući efekat?

R 81. Definicija promenljivih:

- x_{11} označava izgradnju omladinskog doma po projektu P_{11}
- x_{12} označava izgradnju omladinskog doma po projektu P_{12}
- x_{21} označava izgradnju obdaništa po projektu P_{21}
- x_{22} označava izgradnju obdaništa po projektu P_{22}
- x_{31} označava izgradnju osnovne škole projektu P_{31}
- x_{32} označava izgradnju osnovne škole po projektu P_{32}

x_{33} označava izgradnju osnovne škole po projektu P_{33}

x_{41} označava izgradnju vodovodne mreže po projektu P_{41}

Model:

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} = [x_{ij}], \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3$$

$$2x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 3x_{22} + 6x_{31} + 8x_{32} + 8x_{33} + 4x_{41} \leq 17$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_{41} \leq 0$$

$$x_{41} \leq 1$$

$$6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{21} + 5x_{22} + 4x_{31} + 8x_{32} + 7x_{33} + 9x_{41} = z \rightarrow \max$$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 34.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	2.000000
X12	1.000000	0.000000
X21	1.000000	0.000000
X22	0.000000	4.000000
X31	0.000000	4.000000
X32	1.000000	0.000000
X33	0.000000	1.000000
X41	1.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	8.000000
4)	0.000000	9.000000
5)	0.000000	8.000000
6)	0.000000	17.000000

NO. ITERATIONS= 4

Optimalno rešenje:

$$x_{11} = 0 \quad x_{12} = 1$$

$$\begin{aligned}
x_{21} &= 1 & x_{22} &= 0 \\
x_{31} &= 0 & x_{32} &= 1 & x_{33} &= 0 \\
x_{41} &= 1 & z_{\max} &= 34
\end{aligned}$$

Mesna zajednica može izgraditi sve planirane objekte, i to: omladinski dom po projektu P_{12} , obdanište po projektu P_{21} , osnovnu školu po projektu P_{32} i vodovodnu mrežu po projektu P_4 . Očekivani maksimalni efekti iznose 34 jedinice.

PRIMER 82. Jedno brodogradilište je primilo narudžbine za izgradnju pet brodova B_i . Izgradnja brodova traje dve godine, pri čemu se angažuju sledeća novčana sredstva (data u milionima dinara):

Godina	B R O D O V I					Raspoloživa sredstva
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
1.	20	10	20	10	30	60
2.	10	5	10	20	30	70

Dodatni uslovi su sledeći:

- brodovi B_1 i B_2 se ne mogu istovremeno graditi zbog ograničenih prostornih mogućnosti,
- ako se prihvati izgradnja broda B_4 , tada se mora graditi i B_2 , ali izgradnja broda B_2 ne povlači obavezu izgradnje B_4 .

Koje brodove treba izgraditi u brodogradilištu, ako je cilj maksimalna dobit? Prodajom brodova ostvaruje se dobit redom 20 miliona, 10 miliona, 2 miliona, 30 miliona i 40 miliona dinara.

R 82. Neka x_i označava izgradnju broda B_i , $i=1, 2, 3, 4, 5$.

Model:

$$\begin{aligned}
x_i &\geq 0, \quad x_i = [x_i], \quad i=1, 2, 3, 4, 5 \\
20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 30x_5 &\leq 60 \\
10x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 &\leq 70 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
-x_2 + x_4 &\leq 0 \\
x_3 &\leq 1 \\
x_5 &\leq 1 \\
20x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 30x_4 + 40x_5 &= z \rightarrow \max
\end{aligned}$$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6
OBJECTIVE VALUE = 81.000000

NEW INTEGER SOLUTION OF 80.000000 AT BRANCH 0 PIVOT 6
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 80.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	-20.000000
X2	1.000000	-10.000000
X3	0.000000	-2.000000
X4	1.000000	-30.000000
X5	1.000000	-40.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	10.000000	0.000000
3)	15.000000	0.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	1.000000	0.000000
7)	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 6
BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

Rešenje:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 1 \quad z = 80$$

Brodogradilište treba da prihvati izgradnju brodova B_2 , B_4 i B_5 . Od raspoloživih sredstava u prvoj godini će preostati 10 miliona dinara, a u drugoj godini 15 miliona dinara. Očekivana dobit iznosi 80 miliona dinara.

3.5. ZADACI ZA VEŽBE

1. ZADATAK

U jednoj fabrici raspolaže se sa 15 milijardi dinara investicionih sredstava, koje se mogu uložiti prema četiri različite mogućnosti. Za svaku investicionu mogućnost, izrađeni su projekti i ocenjeni su mogući efekti. Podaci su dati sledećom tabelom:

Investicione mogućnosti	I	II	III	IV
Projekti	P ₁	P ₂₁ P ₂₂	P ₃	P ₄₁ P ₄₂
Potrebna sredstva po projektima u milijardama dinara	5	3 2	1	6 5
Očekivani efekti	6	8 6	3	10 8

Potrebno je uzeti u obzir da prvu investicionu mogućnost uslovljava realizacija treće mogućnosti, tj. prva ne može biti realizovana bez treće. Odredite optimalni investicioni program!

2. ZADATAK

U jednoj fabrici raspolaže se sa 330 miliona dinara investicionih sredstava koja se ulažu prema pet mogućnosti ($I_i, i=1,2,3,4,5$). Za svaku mogućnost izrađeni su projekti, s tim da za prvu, drugu i petu mogućnost ima više alternativa (P_{ij}). Ako se kod druge mogućnosti prihvati prvi alternativni projekat, tada se obavezno mora realizovati i treća investiciona mogućnost, dok je treću moguće i samostalno realizovati. Podaci potrebni za programiranje dati su sledećom tabelom:

Investiciona mogućnost	I ₁	I ₂	I ₃	I ₄	I ₅
Projekat	P ₁₁ P ₁₂	P ₂₁ P ₂₂ P ₂₃	P ₃	P ₄	P ₅₁ P ₅₂
Potrebna sredstva (mil.din)	120 120	130 140 110	50	100	60 50
Godišnja dobit (mil.din)	300 200	100 150 400	100	100	100 500

Koje projekte treba realizovati ako je cilj maksimalna godišnja dobit?

5. ZADATAK

Jedno građevinsko preduzeće je primilo narudžbine za izgradnju tri poslovne zgrade (Z_1 , Z_2 i Z_3). Izgradnja traje po dve godine uz angažovanje sledećih sredstava (u stotinama hiljada dinara):

	Z_1	Z_2	Z_3	Raspoloživa sredstva
1. godina	20	40	50	90
2. godina	20	10	10	20

Iz tehničkih razloga zgrade Z_2 i Z_3 se ne mogu graditi istovremeno. Prodajom zgrada ostvaruje se redom 5, 10 odnosno 15 stotina hiljada dinara prihoda.

1. Koje zgrade treba izgraditi, ako je cilj maksimalni prihod?
2. Pored metoda koji ste primenili, navedite još jedan metod rešavanja modela iz oblasti celobrojnog programiranja i objasnite njegovu suštinu!

6. ZADATAK

Građani jedne MZ, samodoprinosom, prikupili su 30 miliona dinara. Ta sredstva žele utrošiti za izgradnju tri objekata na teritoriji MZ. Izrađeni su potrebni projekti i procenjeni su odgovarajući budući efekti. Sledeća tabela obuhvata ove podatke:

PROJEKAT	OBJEKAT A			OBJEKAT B	OBJEKAT C
	A_1	A_2	A_3	B_1	C_1
POTREBNA SREDSTVA ZA IZGRADNJU (u mil. dinara)	12	8	12	8	12
BUDUĆI EFEKTI	10	6	7	10	12

Ako će biti izgradjen objekat B, onda obavezno se mora izgraditi i objekat C, ali objekat C može biti izgradjen samostalno.

1. Koje objekte treba izgraditi na teritoriji MZ ako je cilj maksimalni budući efekat? Postaviti samo model!
2. Koje probleme, modele i metode poznajete iz oblasti celobrojnog programiranja?

9. ZADATAK

Jedno građevinsko preduzeće ima narudžbine za izgradnju pet poslovnih zgrada: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 i z_5 . Izgradnja traje po dve godine i angažuje sledeći iznos sredstava (u milionima dinara):

Godina	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	Rapoloživa sredstva
1.	20	40	40	60	20	120
2.	10	20	20	60	40	140

Dodatni uslovi su sledeći:

- Zgrade z_1 i z_4 se ne mogu istovremeno graditi iz tehničkih razloga.
- Ako se prihvati izgradnja zgrade z_5 , tada se mora graditi i z_1 , ali izgradnja z_1 ne povlači obavezu izgradnje z_5 .

1. Koje zgrade treba izgraditi, ako je cilj maksimalna dobit? Prodajom zgrada ostvaruje se dobit od redom 20; 40; 40; 18 odnosno 60 miliona dinara!
2. Iz oblasti celobrojnog programiranja navedite:
 - probleme i tipične zadatke
 - vrste modela
 - metode rešavanja formulisanih modela!

10. ZADATAK

Jedna fabrika proizvodi tri proizvoda A, B i C pod sledećim tehnološkim uslovima:

MAŠINE	TEHNIČKI KOEFICIJENTI			KAPACITETI
	A	B	C	
M_1	3 č/kom	1 č/kom	6 č/kom	900
M_2	5 č/kom	4 č/kom	8 č/kom	1800
M_3	1 č/kom	2 č/kom	8 č/kom	720
PRODAJNE CENE U stotinama din	18 din/kom	14 din/kom	6 din/kom	

1. Odredite optimalni plan proizvodnje uz maksimalni prihod!
2. Odredite celobrojno rešenje!
3. Da li se menja optimalno rešenje pod 1. ako je cilj maksimalni fizički obim proizvodnje. (Ako se menja program, odredite novo rešenje)?

11. ZADATAK

Jedna mesna zajednica raspolaže sa 19 miliona dinara investicionih sredstava. ta sredstva može uložiti za izgradnju bazena, obdaništa, osnovne škole i vodovodne mreže na teritoriji gde će se podići osnovna škola. Za svaku investicionu mogućnost izradili su više alternativnih projekata, i utvrdili kolika sredstva bi trebalo uložiti u realizaciju pojedinih projekata, zatim su kvantificirali buduće efekte koji bi se mogli postići realizacijom od rađenog projekta. Ove podatke obuhvata sledeća tabela:

INVESTICIONE MOGUĆNOSTI	Bazen		Obdanište		Osnovna škola			Vodovod	
	P ₁₁	P ₁₂	P ₂₁	P ₂₂	P ₃₁	P ₃₂	P ₃₃	P ₁₄	P ₁₅
Potrebna sredstva u mil. dinara	3	4	3	3	6	8	8	4	5
Očekivani efekat	4	8	9	5	4	8	7	9	3

Potrebno je uzeti u obzir da ako izgrade osnovnu školu obavezno moraju izgraditi i vodovod, ali izgradnja vodovoda ne povlači obavezu izgradnje osnovne škole.

1. Koje objekte treba izgraditi, ako je cilj maksimalni budući efekat?
2. U koju grupu modela spada model 1. sa stanovišta kvaliteta aktivnosti?

12. ZADATAK

Jedno preduzeće raspolaže sa 350 miliona dinara investicionih sredstava, koje može uložiti u neke od pet mogućnosti, za koje su izrađeni projekti, pri čemu za prvu, drugu i petu mogućnost postoje i alternative (P_{ij}). Ako za drugi projekat bude prihvaćena prva alternativa, tada se obavezno mora realizovati treći projekat, a inače, treći projekat može biti i samostalno realizovan. Podaci za programiranje dati su sledećom tabelom:

Projekat	P ₁₁	P ₁₂	P ₂₁	P ₂₂	P ₂₃	P ₃	P ₄	P ₅₁	P ₅₂
Dobitak (mil. din godišnje)	30	20	10	15	40	10	10	10	50
Potrebna sredstva za investiranje po projektu (mil. din)	12	12	13	14	11	5	10	6	5

1. Koje investicione mogućnosti treba realizovati, ako je cilj maksimalni dobitak?
2. U koju grupu modela spada model 1.?
3. Navedite probleme, modele i metode rešavanja modela iz oblasti celobrojnog programiranja!

19. ZADATAK

Ispitajte koji od sledećih pet mogućih investicionih projekata treba realizovati, ako se raspoložuje sledećim podacima (u milionima dinara):

	P R O J E K A T					RASPOLOŽIVA SREDSTVA
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	
Investicije u 1. godini	2	2	4	2	4	8
Investicije u 2. godini	2	3	5	2	2	12
Očekivani dobitak po projektu	15	4	16	2	5	

Uz navedena ograničenja koja se odnose na raspoloživa sredstva, moraju se, prilikom optimiranja, uzeti u obzir i sledeći zahtevi:

- projekti P₁ i P₂ ne mogu se istovremeno realizovati,
- ako se realizuje projekta P₅, mora se realizovati i P₃, ali realizacija samog projekta P₃ na povlači obavezu realizacije P₅.

1. Odredite optimalni investicioni program, ako je cilj maksimalni dobitak!
2. Navedite i objasnite kakve probleme, modele i metode rešavanja znate iz oblasti celobrojnog programiranja!

20. ZADATAK

U jednoj fabrici raspoložuje se sa 600 miliona dinara investicionih sredstava, koja se ulažu prema šest mogućnosti (I_j; j=1, 2, 3, 4, 5, 6). Za svaku mogućnost izrađeni su projekti, s tim da za prvu, drugu i šestu mogućnost ima više alternativa (P_{ij}). Ako se kod prve mogućnosti prihvati drugi alternativni projekat, tada se obavezno mora realizovati i treća investiciona mogućnost, dok je treću moguće i samostalno realizovati.

1. Koje projekte treba realizovati ako je cilj da budući efekti budu maksimalni. Postavite model i polaznu simpleks tabelu!
2. Kakve probleme, metode i modele poznajete iz oblasti celobrojnog programiranja? Podaci potrebni za programiranje dati su u sledećoj tabeli:

Investiciona mogućnost	I ₁		I ₂		I ₃	I ₄	I ₅	I ₆		
	P ₁₁	P ₁₂	P ₂₁	P ₂₂	P ₃₁	P ₄₁	P ₅₁	P ₆₁	P ₆₂	P ₆₃
Potrebna sredstva za realizaciju P _{ij}	60	60	100	80	200	100	50	100	50	100
Očekivani efekti	50	10	20	40	100	50	30	50	20	50