PROBLEM PRIDRUŽIVANJA (RASPOREĐIVANJA, ASIGNACIJE)

Neka je dat specijalni transportni problem u kojem je jednak broj izvora S_i i odredišta D_j, tj. $m=n$ (ili se formira jednakost uvođenjem fiktivnih redova ili kolona), i kada su sve raspoložive (ponuđene) i tražene količine jednake jedinici, tj. $s_i=d_j=1$, za svako i, j. Promenljiva x_{ij} koja označava pridruživanje izvora S_i odredištu D_j, može uzeti vrednost nula ili jedan. Ako je dato c_{ij} kao pokazatelj utroška, tada se model pridruživanja formuliše na sledeći način:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j=1,2,...,n \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 , \qquad i = 1,2,...,n \qquad \text{(b)} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 , \qquad j = 1,2,...,n \qquad \text{(c)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = v \rightarrow \min \qquad \text{(d)}$$

Ekonomski problem koji se može predstaviti modelom (1) definiše se na sledeći način: postoji n radnih zadataka i n različitih izvršilaca (radnika, mašina, itd); potrebno je odrediti koji izvršilac da obavlja koji radni zadatak (jednom radnom zadatku pripada samo jedan izvršilac, i jednom izvršiocu pripada samo jedan radni zadatak), uz minimalne ukupne utroške (npr. vremena) ili troškove. Zadatak se može rešiti primenom simpleks postupka, metodom distribucije (prikazanim kod transportnog problema) ili takozvanim mađarskim metodom.

MAĐARSKI METOD

Kod mađarskog metoda primenjuje se sledeći niz postupaka:

- 1. korak - Formira se inicijalna matrica troškova (ako nije kvadratna, vrši se dopuna redovima ili kolonama koji sadrže troškovne elemente jednake nuli):

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{bmatrix}$$

- 2. korak - Redukuje se matrica troškova:
  - Od svakog elementa u prvom redu oduzima se najmanji elemenat tog reda. Postupak se ponavlja, za sve redove matrice.
  - Od svakog elementa u prvoj koloni dobijene matrice oduzima se najmanji elemenat date kolone. Postupak se ponavlja za sve kolone matrice.

- 3. korak - U redukovanoj matrici određuju se nezavisne nule. U datoj matrici proizvoljno se bira jedna nula koja se tretira nezavisnom, a sve ostale nule u redu i koloni izabrane nezavisne nule su takozvane slobodne nule. Prvom nezavisnom nulom nezauzetim redovima i kolonama matrice bira se (ponovo proizvoljno) sledeća nezavisna nula, i postupak se ponavlja, dokle god se još u matrici može odrediti neka nezavisna nula. Izbor nezavisnih nuli, kako je rečeno, jeste proizvoljan, ali, ipak, prioritet se daje onim nulama koje su jedine u redu i/ili koloni (ako ima takvih). Nezavisna nula na polju `i-j` pokazuje raspored (pridruživanje) izvršioca `i` za izvršenje zadatka `j`. Cilj je odrediti toliko nezavisnih nuli koliko je redova (odnosno) kolona u matrici; u ovom slučaju dobijeno je optimalno rešenje, inače, prelazi se na sledeći korak.

- 4. korak - Određuju se takozvane poklopne linije (poklopnice). Bira se red u kojem nema nezavisne nego samo slobodnih nuli i poklopnicom precrtamo svaku onu kolonu koja pripada slobodnoj nuli u datom redu. Postupak se ponavlja za sve redove bez nezavisne nule. Zatim, bira se kolona u kojoj nema nezavisne nego samo slobodnih nuli i poklopnicom precrtamo svaki onaj red koji pripada slobodnoj nuli u datoj koloni. Ako povlačenjem poklopnica nisu sve nule poklopljene, povlačimo nove poklopnice tako, da sve nule (i nezavisne i slobodne) budu poklopljene. Ako se u toku povlačenja poklopnica desi da se dve poklopnice seku na nezavisnoj nuli postupak se prekida i počinje iz početka korakom 3, sa novom kombinacijom nezavisnih nuli u reduciranoj matrici. Broj nezavisnih nuli treba da bude jednak broju poklopnica. Ako je manji, takođe se traži početno rešenje sa novom kombinacijom nezavisnih nuli prema koraku 3.

- 5. korak - Modifikacija matrice. Nalazi se najmanji nepoklopljeni elemenat matrice; neka je vrednost tog elementa jednako `k`. Od svakog nepoklopljenog elementa oduzima se `k` i na svaki dvostruko poklopljeni elemenat dodaje se `k`; jedan put poklopljeni elementi se ne menjaju. Postupak se ponavlja sa modifikovanom matricom prelaskom na korak 3.

PRIMER 1. Jedno poljoprivredno dobro raspolaže sa pet vrsta sejačica S_j (j=1,2,3,4,5) i s istim brojem raznih kategorija zemljišta Z_i (i=1,2,3,4,5). Svakom sejačicom se može izvršiti setva na svakoj vrsti zemljišta, ali sa različitom produktivnošću. U sledećoj tabeli su svrstani pokazatelji utroška vremena po jedinice površine (u minutima po hektaru):

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	160	120	240	100	180
S_2	220	120	160	160	140
S_3	100	160	220	180	220
S_4	140	100	220	120	180
S_5	100	180	240	160	220

1. Odredite raspored sejačica sa najmanjim fondom utroška vremena!

2. Koliko iznosi ukupno utrošeno vreme za sejanje ako svaka sejačica treba da seje po 100 hektara?

R 108.1.

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 160 & 120 & 240 & 100 & 180 \\ 220 & 120 & 160 & 160 & 140 \\ 100 & 160 & 220 & 180 & 220 \\ 140 & 100 & 220 & 120 & 180 \\ 100 & 180 & 240 & 160 & 220 \end{bmatrix}$$

Nakon redukcije po redovima sledi:

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 140 & 0 & 80 \\ 100 & 0 & 40 & 40 & 20 \\ 0 & 60 & 120 & 80 & 120 \\ 40 & 0 & 120 & 20 & 80 \\ 0 & 80 & 140 & 60 & 120 \end{bmatrix}$$

Redukcijom po kolonama sledi:

$$\underline{T}_3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1. & & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 60 & 20 & 100 & (0) & 60 \\ 100 & 0 & 0 & 40 & (0) \\ (0) & 60 & 80 & 80 & 100 \\ 40 & (0) & 80 & 20 & 60 \\ 0 & 80 & 100 & 60 & 100 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3. \\ 2. \\ \\ 4. \\ \\ \end{array} \end{array}$$

U matrici $\underline{T}_3$ određene su nezavisne nule i poklopnice (broj pokolpnica jednak je broju nezavisnih nuli). Namanji nepoklopljeni elemenat je 60.

Modifikacijom matrice sledi:

$$\underline{T}_4 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1. & 2. & & 4. & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 120 & 20 & 100 & (0) & 60 \\ 160 & 0 & 0 & 40 & (0) \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 40 \\ 100 & (0) & 80 & 20 & 60 \\ (0) & 20 & 40 & 0 & 40 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ 3. \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

U matrici $\underline{T}_4$ odredjene su četiri nezavisne nule i isto toliko poklopnica. najmanji nepoklopljeni elemenat je 20. Nakon modifikacije je:

$$
\underline{T}_5 = \begin{bmatrix} 120 & 20 & 80 & (0) & 40 \\ 180 & 20 & 0 & 60 & (0) \\ 0 & 0 & (0) & 20 & 20 \\ 100 & (0) & 60 & 20 & 40 \\ (0) & 20 & 20 & 0 & 20 \end{bmatrix}
$$

Matrica $\underline{T}_5$ sadrži pet nezavisnih nuli, dakle, dobijeno je optimalno rešenje:

Sejačica	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Zemljište	Z_4	Z_5	Z_3	Z_2	Z_1

v_{min} = 100 + 140 + 220 + 100 + 100 = 660 minuta.

R 108.2. Ukupno utrošeno vreme na 500 hektara (100 hektara po sejačici) je 66000 minuta ili 1100 časova.

PRIMER 109. Na obavljanju jednog radnog zadatka radila je grupa od pet radnika (R_i, i=1,2,3,4,5), sa različitim produktivnostima, na tri mašine M_j (j=1,2,3). Modernizacijom proizvodnje smanjena je potreba za radnicima na tri, dok se dva rednika premeštaju u drugi odnosno treći pogon. Odrediti koja će tri radnika obavljati poslove i na kojoj mašini, ako je postavljen cilj minimum ukupno utrošenog radnog vremena za proizvodnju jedinice proizvoda! Sledeća tabela sadrži podatke o potrebnom radnom vremenu u minutima za obradu jedinice proizvoda po radnicima i mašinama:

RADNICI MAŠINE	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
M_1	8	9	7	12	8
M_2	9	10	3	8	10
M_3	10	12	10	9	12

R 109.2. Matrica troškova se formira uvođenjem dva dodatna (fiktivna) reda s troškovnim elementima jednakim nuli, u cilju izjednačavanja broja redova s brojem kolona, gde četvrti red označava premeštaj radnika u drugi pogon, a peti red premeštaj u treći pogon:

$$
\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 & 12 & 8 \\ 9 & 10 & 3 & 8 & 10 \\ 10 & 12 & 10 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Redukciju po kolonoma je moguće vršiti samo za iznose nula, a nakon redukcije po redovima sledi:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & 1. & & \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & (0) & 5 & 7 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\underline{T}_2 = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & (0) & 3 \\ 0 & (0) & 0 & 0 & 0 \\ (0) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} 4. \\ 2. \\ 3. \end{array}$$

Modifikacijom matrice po najmanjem nepoklopljenom elementu sledi:

$$\underline{T}_3 = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 4 & (0) \\ 5 & 6 & (0) & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & (0) & 3 \\ 0 & (0) & 1 & 0 & 0 \\ (0) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matrica $\underline{T}_3$ sadrži optimalno rešenje: na mašini M_1 će raditi radnik R_5, na M_2 radi R_3, na M_3 radi R_4, dok se radnici R_1 i R_2 premeštaju na druge radne zadatke.

Postoji alternativno rešenje problema, tj. u matrici $\underline{T}_3$ pet nezavisnih nuli se mogu odabrati i na alternativan način:

$$\underline{T}_4 = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 4 & (0) \\ 5 & 6 & (0) & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & (0) & 3 \\ (0) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (0) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underline{T}_5 = \left[\begin{array}{ccccc} (0) & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & (0) & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & (0) & 3 \\ 0 & (0) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (0) \end{array}\right]$$

$$\underline{T}_6 = \left[\begin{array}{ccccc} (0) & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & (0) & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & (0) & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (0) \\ 0 & (0) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matrice $\underline{T}_3$, $\underline{T}_4$, $\underline{T}_5$ i $\underline{T}_6$ sadrže četiri različita optimalna rešenja. Primetimo da se u sve četiri matrice na poljima 2-3 i 3-4 nalaze programirana mesta (nezavisne nule), pošto su to jedine nule u drugom, odnosno trećem redu. Ponuđena alternativna optimalna rešenje između kojih se vrši izbor su:

Rešenje	Radni zadatak:	M_1	M_2	M_3	Drugi pogon	Treći pogon
1.	Radnik:	R_5	R_3	R_4	R_2	R_1
2.	Radnik:	R_5	R_3	R_4	R_1	R_2

3.	Radnik:	R_1	R_3	R_4	R_2	R_5
4.	Radnik:	R_1	R_3	R_4	R_5	R_2

Minimalno ukupno vreme obavljanja radnih zadataka iznosi 20 minuta.

PRIMER 111. Pet proizvoda (P_i, i=1,2,3,4,5) treba obraditi na pet mašina (M_j, j=1,2,3,4,5) jednog pogona. Produktivnost mašina u obradi pojedinih proizvoda je različita. Broj proizvedenih komada proizvoda za 1 čas rada mašina prikazan je sledećom tabelom:

Mašine / Proizvodi	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	14	12	16	9	10
P_2	17	14	20	9	8
P_3	16	10	19	8	9
P_4	16	9	17	6	10
P_5	16	10	13	8	9

Odrediti koji proizvod na kojoj mašini treba obraditi, ako je cilj maksimalan ukupan broj komada proizvedenih za 1 čas rada mašina!

R 111. Pošto je zadatak dat u formi problema maksimuma, preformulišimo ga u problem minimuma množenjem elemenata učinaka sa -1, čime se dobija početna matrica analogna matrici troškovnih elemenata:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} -14 & -12 & -16 & -9 & -10 \\ -17 & -14 & -20 & -9 & -8 \\ -16 & -10 & -19 & -8 & -9 \\ -16 & -9 & -17 & -6 & -10 \\ -16 & -10 & -13 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Najmanji elementi po redovima matrice su, redom, -16, -20, -19, -17 i -16. Oduzmanjem ovih vrednosti od odgovarajućih elemenata, sledi:

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 0 & 11 & 10 \\ 1 & 8 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Nakon redukcije po kolonama sledi:

$$\begin{array}{c} \\ \underline{T}_3 = \end{array} \begin{array}{ccccc|c} & & 1. & & & \\ 2 & 0) & 0 & 0 & 0 & 2. \\ 3 & 2 & (0) & 4 & 6 & \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 4 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 4 & 0 & 4 & 1 \\
(0) & 2 & 3 & 1 & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ 3. \end{array}
\end{array}
$$

Modifikacija sa vrednošću najmanjeg nepokoplјenog elementa, koji iznosi 1 daje:

$$
\underline{T}_4 = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} & & 1. & & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccc}
2 & (0) & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & (0) & 3 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 3 & 0 & 3 & (0) \\
(0) & 2 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} 2. \\ \\ \\ 3. \\ 4. \end{array}
\end{array}
$$

Nakon modifikacije po vrednosti najmanjeg nepokopljenog elementa (1) sledi:

$$
\underline{T}_5 = \left[\begin{array}{ccccc}
2 & 0 & 2 & (0) & 0 \\
1 & (0) & 0 & 2 & 4 \\
1 & 3 & (0) & 2 & 2 \\
0 & 3 & 1 & 3 & (0) \\
(0) & 2 & 5 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

Optimalno rešenje:

Proizvod	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Mašina	M_4	M_2	M_3	M_5	M_1

Maksimalni učinak po jednom času rada svih mašina zajedno je:
9 + 14 + 19 + 10 + 16 = 68 komada proizvoda.

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. U jednom pogonu postoji pet mašina (M_j, j=1,2,3,4,5) pomoću kojih želimo obaviti pet vrsta poslova (P_i, i=1,2,3,4,5). Na svakoj mašini se može obaviti svaki posao, ali uz različite troškove, kako to pokazuju elementi sledeće tabele (u stotinama dinara):

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	40	50	50	40	100
P_2	40	150	200	45	175
P_3	40	50	100	150	75
P_4	50	150	45	200	175
P_5	45	40	100	45	50

1. Odrediti koji posao na kojoj mašini treba obaviti tako da ukupni troškovi budu minimalni!

2. Izračunajte ukupne troškove!

2. Pet putnika (P_i, i=1,2,3,4,5) treba da obiđu po jedan od pet gradova (G_j, j=1,2,3,4,5) svojim putničkim vozilima, koji su različitih tipova i karakteristika. Odredite koji putnik koji grad treba da obiđe, ako je cilj minimum potrošnje goriva! Potrošnja goriva na pojedinim relacijama je:

Gradovi / Trgovački putnik	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
P_1	20	40	60	30	80
P_2	60	90	90	60	110
P_3	40	50	70	10	90
P_4	30	40	50	10	30
P_5	20	50	10	10	20

3. Jedno poljoprivredno gazdinstvo ima pet ribnjaka (V_j, j=1,2,3,4,5) i u njima planira uzgoj pet različitih vrsti riba (R_i, i=1,2,3,4,5), koje se ne mogu nalaziti u istom ribnjaku. Odredite koju vrstu ribe u kojem ribnjaku gajiti ako je cilj maksimalni prinos! Sledeća tabela sadrži podatke o godišnjem ulovu riba iz pojedinih ribnjaka, u tonama:

Ribnjak / Vrsta riba	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
V_1	40	50	50	40	100
V_2	40	150	200	45	175
V_3	40	50	100	150	75
V_4	50	150	45	200	175
V_5	45	40	100	45	50

4. U jednom pogonu postoji pet mašina (M_j), pomoću kojih treba obaviti 5 vrsta poslova (P_i). Na svakoj mašini se može obaviti svaki posao, ali uz različite troškove. Upravo to pokazuju elementi sledeće tabele (u stotinama dinara):

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	175	45	150	40	200
P_2	100	40	50	40	50
P_3	175	200	150	50	45
P_4	75	150	50	40	100
P_5	50	45	40	45	100

1. Odredite koji posao na kojoj mašini treba obaviti, tako da ukupni troškovi budu minimalni!
2. Izračunajte ukupne troškove!
3. Navedite model asignacije i metode njegovog rešavanja!

Transoprtni problem (maksimum)

U jednom poljoprivrednom gazdinstvu treba zasejati sa šest različitih kultura (K_j, j=1,2,3,4,5,6) pet različitih tipova zemljišta (Z_i, i=1,2,3,4,5). Veličinu zemljišnih površina po tipovima (ha), plan setve po kulturama (ha) i prinosi u decitoni po hektaru pojedinih kultura na pojedinim tipovima zemljišta dati su sledećom tabelom:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	Povr{ine
Z_1	18	9	45	9	30	45	2500
Z_2	21	15	20	10	36	9	1000
Z_3	29	30	23	15	38	24	1500
Z_4	6	36	26	18	40	18	2000
Z_5	15	33	27	21	45	21	1000
Plan setve	600	400	1500	2500	1500	1500	

1. Utvrdite optimalni setveni plan uz maksimalan prinos!