1. Glava

Motivi i osnovni principi projektovanja šeme relacione baze podataka

U teoriji relacionog modela podataka se polazi od pretpostavke da jedna šema relacije - šema univerzalne relacije (U, C) predstavlja inicijalni model realnog sistema, bez obzira na kompleksnost tog realnog sistema. Saglasno toj predpostavci, skup U sadrži ona obeležja realnog sistema, koja su bitna za realizaciju zadataka informacionog sistema, a skup C sadrži ograničenja, koja su posledica pravila ponašanja i poslovanja u realnom sistemu. Ta pravila ponašanja i poslovanja se izražavaju putem: integriteta domena, zabrane nula vrednosti za obeležja, funkcionalnih, višeznačnih i zavisnosti spoja, kao i putem jednorelacionih zavisnosti sadržavanja. Za razmatranje postupka projektovanja skupa šema relacija, bitne su funkcionalne, višeznačne i zavisnosti spoja, te će se, u ovom poglavlju smatrati da skup ograničenja C sadrži samo te zavisnosti.

Međutim, univerzalna relacija je, kao baza podataka, veoma nepogodno rešenje, pre svega sa tačke gledišta efikasnog održavanja baze podataka u konzistentnom stanju. Problemi, koji se javljaju pri održavanju univerzalne relacije u konzistentnom stanju, nazivaju se anomalijama ažuriranja. Obezbeđenje uslova za efikasnu kontrolu integriteta predstavlja jedan od osnovnih ciljeva projektovanja skupa šema relacija šeme baze podataka.

Problemi, izazivani anomalijama ažuriranja, rešavaju se rastavljanjem (dekomponovanjem) šeme univerzalne relacije na skup šema relacija S, takav da je $|S| > 1$. To dekomponovanje predstavlja jednu od metoda, koja se koristi pri projektovanju šeme baze podataka. Uvođenje samog pojma dekomponovanja, pokreće određeni niz pitanja. U njih spadaju:

- kakve uslove treba da zadovolji skup šema relacija S, dobijen dekompozicijom,
- kako vršiti dekompoziciju.

- do kog nivoa rastavljati šemu univerzalne relacije i šeme relacija, dobijene njenim rastavljanjem,
- kako definisati međurelaciona ograničenja, koja se mogu i koja je potrebno uvesti tek nakon rastavljanja šeme univerzalne relacije.

Cilj ovog poglavlja je uvođenje pojma anomalija ažuriranja, čija eliminacija predstavlja jedan od osnovnih motiva za projektovanje šeme baze podataka. Takođe, u okviru poglavlja se definiše pojam spoja bez gubitaka, kao jednog od poželjnih uslova, koji treba da zadovolji skup šema relacija S. Na osnovu pojma spoja bez gubitaka se izvode i osnovni postupci za rastavljanje šeme relacije na šeme relacija. Odgovor na pitanje do kog nivoa rastavljati šemu univerzalne relacije, daje se u drugom, a dogovor na pitanje kako definisati međurelaciona ograničenja, razmatra se u sedmom poglavlju ove knjige.

1.1. Anomalije ažuriranja

U opštem slučaju, šema univerzalne relacije $(\mathcal{U}, C)$, kao šema baze podataka, ne može se smatrati dobrim rešenjem. Jedan, ali ne i jedini razlog predstavlja činjenica da bi, u tom slučaju, kontrola integriteta bila veoma kompleksna. Naime, ako skup ograničenja C sadrži zavisnost spoja $\bowtie(X_1,..., X_n)$, skup višeznačnih zavisnosti $\mathcal{M}$ i skup funkcionalnih zavisnosti $\mathcal{F}$, tada je, nakon svakog ažuriranja pojave r nad $(\mathcal{U}, C)$ potrebno proveriti da li nova relacija r' zadovoljava uslov

$$r' = \mathop{\bowtie}_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(r'),$$

kao i da li zadovoljava svaku višeznačnu i svaku funkcionalnu zavisnost.

Drugi razlog predstavljaju takozvane anomalije ažuriranja. Anomalije ažuriranja se manifestuju pri ažuriranju univerzalne pojave, ali ne samo pri ažuriranju univerzalne pojave. Problemi se javljaju i pri upisu i pri brisanju i pri modifikaciji torki u relacijama baze podataka. Uzrok postojanja anomalija ažuriranja su: integritet entiteta, funkcionalne, višeznačne i zavisnosti spoja. Pošto je integritet entiteta posledica funkcionalnih zavisnosti, u daljem tekstu se posebno razmatraju anomalije ažuriranja, koje su posledica funkcionalnih, a posebno anomalije ažuriranja, koje su posledica višeznačnih i zavisnosti spoja.

1.1.1. Funkcionalne zavisnosti i anomalije ažuriranja

Integritet entiteta je uzročnik problema pri upisu i brisanju, a zadovoljavanje funkcionalnih zavisnosti, pri modifikaciji torki. Da bi se ovi fenomeni razumeli, treba prvo istaći činjenicu da, u opštem slučaju, šema univerzalne relacije sadrži obeležja većeg broja klasa entiteta. Kao prirodna posledica te činjenice sledi i zaključak, da ključ šeme univerzalne relacije sadrži identifikaciona obeležja većeg broja klasa entiteta.

U univerzalnu pojavu se ne mogu upisati podaci o entitetu samo jedne klase, jer bi to značilo upis nula vrednosti za obeležja svih drugih klasa entiteta. Saglasno tome, pojedine komponente ključa šeme univerzalne relacije bi imale nula vrednosti u novoj torci univerzalne pojave, čime bi bio narušen uslov integriteta entiteta. Ovaj fenomen se naziva anomalijom upisa.

Ako se iz univerzalne pojave žele brisati podaci o entitetu samo jedne klase, često se mora brisati cela torka, da ne bi bio narušen integritet entiteta. Tim brisanjem se mogu izgubiti korisni podaci, ako ih je sadržala samo posmatrana torka. Ovaj fenomen se naziva anomalijom brisanja.

Neka je $X \rightarrow A$ jedna funkcionalna zavisnost u $\mathcal{F}$. Modifikacija vrednosti obeležja A u samo jednoj torci univerzalne pojave, zahteva pristupanje i svim ostalim torkama, u cilju eventualnog usaglašavanja stare vrednosti obeležja A sa novom. U suprotnom, univerzalna pojava više ne mora zadovoljavati funkcionalnu zavisnost $X \rightarrow A$, jer se ista X vrednost može javiti u više torki, sa različitim A vrednostima.

Primer 1.1. Skup $\mathcal{U} = \{BRI, IME, PRZ, BPI, OZP, NAP, OZN, PRN, OCE\}$ sadrži obeležja klasa entiteta: *Student*, *Predmet* i *Nastavnik*. Neka su odnosi između entiteta i obeležja realnog sistema opisani sledećim predikatima:

- student ima: broj indeksa (BRI), ime (IME), prezime (PRZ) i broj položenih ispita (BPI),
- predmet ima: oznaku (OZP) i naziv (NAP),
- nastavnik ima: oznaku (OZN) i prezime (PRN),
- student ima ocenu (OCE) iz predmeta,
- nastavnik predaje studentu,
- nastavnik izvodi nastavu iz predmeta.

I neka važe sledeća pravila poslovanja:

- svaki broj indeksa se dodeljuje najviše jednom studentu, a svaki student ima samo jedan indeks,
- svaka oznaka predmeta se dodeljuje najviše jednom predmetu, a svaki predmet ima samo jednu oznaku,
- svaka oznaka nastavnika se dodeljuje najviše jednom nastavniku, a svaki nastavnik ima samo jednu oznaku,
- ne postoje dva predmeta sa istim nazivom,
- nastavnik izvodi nastavu iz najviše jednog predmeta,
- ako student sluša određeni predmet, sluša ga i polaže kod samo jednog nastavnika,
- svaki student, iz određenog predmeta, ima najviše jednu ocenu.

Navedeni predikati, saglasno tački 5.5.1 u [ML], ukazuju da skup ograničenja C sadrži potpunu zavisnost spoja

$$\rhd\lhd(\{BRI, IMS, PRS, BPI\}, \{OZP, NAP\}, \{OZN, PRN\}, \{BRI, OZP, OCE\}, \{OZN, OZP\}, \{BRI, OZN\}),$$

dok pravila poslovanja omogućavaju definisanje sledećeg skupa funkcionalnih zavisnosti

$F = \{BRI \rightarrow IMS+PRS+BPI,\ OZP \rightarrow NAP,\ NAP \rightarrow OZP,\ OZN \rightarrow OZP+NAP+PRN,$
$BRI+OZP \rightarrow OCE+OZN\}.$

Šema univerzalne relacije (U, C) sadrži tri ključa. To su sledeći skupovi obeležja: $\{BRI, OZN\}$, $\{BRI, NAP\}$, $\{BRI, OZP\}$. Ovoj šemi relacije se može pridružiti naziv *Fakultet*. Na slici 1.1 je prikazana jedna pojava nad šemom relacije *Fakultet*. Ono što, sigurno, prvo pada u oči pri analizi relacije na slici 1.1, je redundansa podataka. Ta redundansa podataka je, u opštem slučaju, karakteristična za sadržaj univerzalne relacije. Međutim, nije redundansa podataka najveći nedostatak relacije na slici 1.1. Ozbiljniji problem predstavljaju anomalije ažuriranja.

Fakultet

BRI	*IMS*	*PRS*	*BPI*	*OZP*	*NAP*	*OZN*	*PRN*	*OCE*
159	*Ivo*	*Ban*	*3*	p_1	*Mat*	n_1	*Han*	*09*
159	*Ivo*	*Ban*	*3*	p_2	*Fiz*	n_2	*Kun*	*08*
013	*Ana*	*Tot*	*1*	p_1	*Mat*	n_3	*Pap*	*06*
119	*Eva*	*Kon*	*2*	p_3	*Meh*	n_4	*Kiš*	*07*
159	*Ivo*	*Ban*	*3*	p_3	*Meh*	n_4	*Kiš*	*10*
119	*Eva*	*Kon*	*2*	p_1	*Mat*	n_1	*Han*	*09*
159	*Ivo*	*Ban*	*3*	p_4	*Hem*	n_5	*Car*	*10*
037	*Eva*	*Tot*	*1*	p_1	*Mat*	n_1	*Han*	*10*
213	*Ivo*	*Ban*	*1*	p_3	*Meh*	n_4	*Kiš*	*10*

Slika 1.1.

Anomalije ažuriranja relacije na slici 1.1 se mogu ilustrovati sledećim primerima:

- U relaciju *Fakultet* se ne mogu upisati podaci o novom nastavniku, dogod se ne zna predmet, koji će izvoditi i bar jedan student, kojem će predavati. Analogna situacija nastupa i pri pokušaju upisa podataka o novom predmetu ili studentu. Upis torke sa nepoznatom vrednošću za bar jedno primarno obeležje, dovodi do narušavanja integriteta entiteta. Ovakve pojave se nazivaju ***anomalijama upisa***.
- Ako se, iz relacije, žele brisati podaci (*13*, *Ana*, *Tot*, *1*), biće izbrisana cela torka, ponovo zbog integriteta entiteta. Međutim, time se gube i podaci o nastavniku (n_3, *Pap*), koji je imao samo tog jednog studenta, kao i informacija da taj nastavnik predaje predmet (p_1, *Mat*). Ovakve pojave se nazivaju ***anomalijama brisanja***.
- Kada neki student položi ispit iz nekog predmeta, u relaciju se upisuje nova torka sa povećanim brojem položenih ispita za tog studenta. Međutim, da bi i ažurirana relacija zadovoljavala funkcionalnu zavisnost $BRI \rightarrow BPI$, potrebno je modifikovati vrednosti obeležja *BPI* i u svim onim torkama, koje sadrže podatke o posmatranom studentu. Ovakve pojave se nazivaju ***anomalijama modifikacije***. □

1.1.2. Anomalije ažuriranja zbog višeznačnih i zavisnosti spoja

Pored funkcionalnih i višeznačne i zavisnosti spoja, ugrađene u šemu relacije, izazivaju anomalije ažuriranja. Anomalije ažuriranja, koje su posledica višeznačnih i zavisnosti spoja, imaju drugačiji karakter nego one, koje izazivaju funkcionalne zavisnosti i integritet entiteta. Ako je u šemu relacije ugrađena višeznačna ili zavisnost spoja, tada se može desiti da:

- upis jedne torke u relaciju zahteva upis još jednog broja drugih torki,
- brisanje jedne torke zahteva brisanje i jednog broja drugih torki,

da bi relacija i dalje zadovoljavala višeznačnu ili zavisnost spoja. Naredni primeri ilustruju ova tvrđenja.

D	M	R
d_1	m_1	r_1

Slika 1.2.

D	M	R
d_1	m_1	r_1
d_1	m_1	r_2
d_2	M_1	r_1
d_2	M_1	r_2

Slika 1.3.

Primer 1.2. Posmatra se šema relacije $N(\{D, M, R\}\{M \rightarrow\rightarrow R | D\})$. Na slici 1.2 je prikazana jedna pojava nad ovom šemom relacije. Ako se u relaciju želi upisati nova torka (d_2, m_1, r_2), moraju biti upisane još dve torke, kako je to pokazano na slici 1.3. Dodatne torke su neophodne da bi nova relacija predstavljala pojavu nad šemom relacije N.

Ako se iz relacije na slici 1.3 želi izbrisati torka (d_2, m_1, r_2), neophodno je izbrisati i bilo torku (d_1, m_1, r_2), bilo torku (d_2, m_1, r_1) ili obe. Dodatni problem je što je zadatak neodređen, ne zna se šta je ispravno rešenje za brisanje dodatnih torki. □

A	B	C	D
a_2	b_1	c_2	d_2

Slika 1.4.

A	B	C	D
a_2	b_1	c_2	d_2
a_3	b_2	c_2	d_3
a_2	b_1	c_2	d_3
a_3	b_2	c_2	d_2

Slika 1.5.

Primer 1.3. Posmatra se šema relacije $N(\{A, B, C, D\}\{\triangleright\triangleleft(AB, BC, CD)\})$. Na slici 1.4 je prikazana jedna pojava nad ovom šemom relacije. Ako se u relaciju želi upisati nova torka (a_3, b_2, c_2, d_3), moraju biti upisane još dve torke, kako je to pokazano na slici 1.5. Dodatne torke su neophodne da bi nova relacija predstavljala pojavu nad šemom relacije N, odnosno da bi relacija zadovoljavala zavisnost spoja $\triangleright\triangleleft(AB, BC, CD)$.

Ako se iz relacije na slici 1.5 želi izbrisati torka (a_2, b_1, c_2, d_3), neophodno je izbrisati još bar jednu od torki: (a_3, b_2, c_2, d_3) ili (a_3, b_2, c_2, d_2). □

1.1.3. Ideja rešenja problema anomalija ažuriranja

Može se pretpostaviti da će opisani problemi nestati, ako se šema univerzalne relacije ($\mathcal{U}$, $\mathcal{C}$) zameni takvim skupom šema relacija $S = \{(R_i, C_i) | i = 1, 2,..., n\}$, koji zadovoljava određene uslove. Prirodno se nameće da treba da bude zadovoljen uslov $0 < |R_i| < |\mathcal{U}|$, za svako $i \in \{1, 2,..., n\}$. O drugim uslovima će biti reči u narednom tekstu i narednim poglavljima.

Od zamene šeme univerzalne relacije skupom šema relacija S, mogu se očekivati i drugi pozitivni efekti. U njih spadaju:

- smanjenje redundanse podataka,
- jasnija semantika šema relacija sa manjim brojem obeležja,
- zasebno vođenje podataka o entitetima jedne klase.

1.2. Dekompozicija sa spojem bez gubitaka

U teoriji projektovanja šeme relacione baze podataka se polazi od pretpostavke o postojanju šeme univerzalne relacije ($\mathcal{U}$, $\mathcal{C}$) i skupa njenih pojava $SAT(\mathcal{U}, \mathcal{C})$. Pošto šema baze podataka sadrži skup šema relacija $S = \{(R_i, C_i) | i = 1, 2,..., n\}$, te šeme relacija se dobijaju dekomponovanjem (rastavljanjem) šeme relacije ($\mathcal{U}$, $\mathcal{C}$) na (neprazne) skupove obeležja $R_i \subset \mathcal{U}$ i, eventualno prazne, skupove ograničenja $C_i \subseteq \mathcal{C}$. Pri tome treba da bude zadovoljen uslov

(1.1) $$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i ,$$

a kao poželjan uslov se postavlja

(1.2) $$\mathcal{C}^+ = (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)^+ .$$

Prema pretpostavci o pojavi nad šemom univerzalne relacije, relacije $r_1,..., r_n$ baze podataka se dobijaju projektovanjem jedne relacije r iz $SAT(\mathcal{U}, \mathcal{C})$, redom, na skupove obeležja $R_1,..., R_n$.

Jedini operator relacione algebre, predviđen za rekonstruisanje relacije na osnovu njenih projekcija, je operator prirodnog spajanja. Operator prirodnog spajanja je uveden u tački 6.1 [ML]. Izbor prirodnog spoja kao operatora za izgradnju univerzalne pojave r od relacija r_i iz pojave baze podataka $r_1,\dots, r_n$, nameće potrebu uvođenja pojma spoja bez gubitaka.

Definicija 1.1. Skup šema relacija $S = \{(R_i, C_i) | i = 1,\dots, n\}$ predstavlja ***dekompoziciju*** (šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$) ***sa spojem bez gubitaka*** ako važi

$$(1.3) \qquad (\forall r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{C}))(r = \mathop{\bowtie}_{i=1}^{n} (\pi_{R_i}(r))). \square$$

Uslov (1.3) predstavlja bitnu osobinu dekompozicije šeme univerzalne relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ na skup šema relacija $S = \{(R_i, C_i) | i = 1,\dots, n\}$. Skup šema relacija S predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, ako se svaka pojava nad šemom $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ može rekonstruisati prirodnim spajanjem projekcija relacije r na skupove obeležja R_i. Pri tome, fraza "bez gubitaka" se odnosi na gubitak informacije, a ne na gubitak torki. Prirodni spoj je takav operator, čijom primenom na projekcije neke relacije, se moraju dobiti sve torke originalne relacije i, eventualno, još neke dodatne. Te dodatne torke nose pogrešnu informaciju. Ako na skupu $\mathcal{U}$ važi potpuna zavisnost spoja $\bowtie(R_1,\dots, R_n)$, tada je uslov (1.3) zadovoljen.

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_2	b_1	c_2

Slika 1.6.

A	B
a_1	b_1
a_2	b_1

B	C
b_1	c_1
b_1	c_2

Slika 1.7.

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_1	c_2
a_2	b_1	c_1
a_2	b_1	c_2

Slika 1.8.

Primer 1.4. Neka je $\mathcal{U} = \{A,B,C\}$, $\mathcal{F} = \{A \to B, C \to B\}$, a $\mathcal{C} = \{\bowtie(AC, BC)\} \cup \mathcal{F}$. Skup šema relacija $S = \{(\{A, B\}, \{A \to B\}), (\{B, C\}, \{C \to B\})\}$, ne predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, jer postoji relacija r nad šemom $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$, za koju važi $r \subset r_1 \bowtie r_2$, gde su r_1 i r_2 projekcije relacije r, redom, na skupove obeležja $\{A, B\}$ i $\{B, C\}$. Na slici 1.6 prikazana je relacija r, na slici 1.7 su prikazane relacije r_1 i r_2, dok je na slici 1.8 prikazana relacija $r_1 \bowtie r_2$. Torke (a_1, b_1, c_2) i (a_2, b_1, c_1) relacije $r_1 \bowtie r_2$ nose lažnu informaciju. $\square$

Treba naglasiti da se važenje uslova (1.3) postavlja samo u odnosu na projekcije $r_1,\dots, r_n$ hipotetične univerzalne relacije r, a ne na aktuelne relacije $s_1,\dots, s_n$ stanja baze podataka. Dobra dekompozicija garantuje da se spajanjem aktuelnih relacija $s_1,\dots, s_n$, neće dobiti "lažne" torke. Uslov (1.3) je projektantski kriterijum, a ekvivalentan je tvrđenju da šema relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ zadovoljava zavisnost spoja $\bowtie(R_1,\dots, R_n)$. Uslov (1.3) se, često, naziva ***preslikavanjem tipa projekcija spoj***.

Dekompozicija sa spojem bez gubitaka šeme univerzalne relacije (ili bilo koje druge šeme relacije) se može dobiti korišćenjem: zavisnosti spoja, višeznačne zavisnosti ili funkcionalne zavisnosti, za to rastavljanje. Na osnovu teoreme 5.10, dokazane u [ML], sledi da se dekomponovanjem šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ na osnovu potpune zavisnosti spoja $\rhd\lhd(X_1,..., X_k)$ dobija skup šema relacija $S = \{(X_i, \mathcal{C}|_{X_i}) | i = 1,..., k\}$, kao dekompozicija sa spojem bez gubitaka. Slično, pošto višeznačna zavisnost predstavlja specijalan slučaj zavisnosti spoja, na osnovu iste teoreme 5. 10, sledi da se dekomponovanjem šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ na osnovu potpune višeznačne zavisnosti $X \rightarrow\rightarrow Y$, dobija skup šema relacija $S = \{(XY, \mathcal{C}|_{XY}), (X(\mathcal{U}\setminus Y), \mathcal{C}|_{X(\mathcal{U}\setminus Y)})\}$, kao dekompozicija sa spojem bez gubitaka.

U literaturi i praksi projektovanja šeme relacione baze podataka, uobičajeno je da se pojam spoja bez gubitaka analizira pod pretpostavkom da skup ograničenja sadrži samo funkcionalne zavisnosti $\mathcal{F}$ i, eventualno, jednu potpunu zavisnost spoja $\rhd\lhd(R_1,..., R_k)$. Saglasno tome, za svako $i \in \{1,..., n\}$ važi

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{R_i}.$$

Pri tome je zavisnost spoja, kao ograničenje, ugrađena u skup šema relacija S.

Kada se skup ograničenja $\mathcal{C}$ svede na jednu zavisnost spoja i skup funkcionalnih zavisnosti $\mathcal{F}$, uslov (1.2) postaje

$$\mathcal{F}^+ = (\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}|_{R_i})^+ . \tag{1.4}$$

Uslov (1.5) nalaže da sve funkcionalne zavisnosti inicijalno zadatog skupa $\mathcal{F}$ treba da budu ugrađene u šeme relacija skupa $S = \{(R_i, \mathcal{F}_i) | i = 1,..., n\}$. Uslov (1.5) je poželjan da bi se obezbedio jedan od preduslova za potpunu kontrolu integriteta baze podataka. Ako taj uslov nije zadovoljen, tada važi $(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i)^+ \subset \mathcal{F}^+$, a stanje baze podataka, konzistentno s obzirom na $(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i)$, ne mora biti konzistentno i s obzirom na inicijalni skup funkcionalnih zavisnosti $\mathcal{F}$.

Primer 1.5. Neka su dati $\mathcal{U}$ i $\mathcal{C}$, kao u primeru 1.4, a $S = \{(\{A, C\}, \{\}), (\{B, C\}, \{C \rightarrow B\})\}$. Skup šema relacija S predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$, jer skupovi obeležja šema relacija iz S predstavljaju komponente definisane zavisnosti spoja. Međutim, sada važi $(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}^+$, jer funkcionalna zavisnost $A \rightarrow B$ nije ugrađena ni u jednu šemu relacije. Na slici 1.9 je prikazana jedna pojava nad skupom šema relacija S. Pojava je konzistentna s obzirom na skup funkcionalnih zavisnosti, ugrađenih u skup šema relacija. To pojava nije konzistentna s obzirom na inicijalni skup funkcionalnih zavisnosti $\mathcal{F}$, jer ne zadovoljava funkcionalnu zavisnost $A \rightarrow B$, što se može lako proveriti izgradnjom relacije $r(AC) \rhd\lhd r(BC)$, slika 1.10, ili izgradnjom reprezentativne pojave (videti prilog P1). □

A	C
a_1	c_1
a_1	c_2

B	C
b_1	c_1
b_2	c_2

Slika 1.9.

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_2	c_2

Slika 1.10.

1.2.1. Odnos zadate zavisnosti spoja i dekompozicije

Kao što primer 1.4 sugeriše, dekompozicija $S = \{(R_i, \mathcal{F}_i) | i = 1,..., n\}$ ne mora biti takva da važi $\rhd\lhd(R_1,..., R_n) = \rhd\lhd(X_1,..., X_k)$, gde je $\rhd\lhd(X_1,..., X_k)$ inicijalno zadata zavisnost spoja, koju pojave nad šemom relacije $(\mathcal{U}, C)$ zadovoljavaju. Ova zavisnost spoja može biti zadata putem predikata. U slučaju primera 1.4, posmatrana dekompozicija čak i ne predstavlja logičku posledicu zadatog skupa ograničenja. Javlja se pitanje kakav odnos treba da bude između dekompozicije $S = \{(R_i, \mathcal{F}_i) | i = 1,..., n\}$ i zadate zavisnosti spoja $(X_1,..., X_k)$, pa da S predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema, pod pretpostavkom da je $\mathcal{F} = \varnothing$, odnosno da je $C = \{\rhd\lhd(X_1,..., X_k)\}$. Za praćenje dokaza ove teoreme, neophodno je poznavanje implikacionog algoritma, opisanog u tački 5.5.4 knjige [ML].

Teorema 1.1. Neka su $J_1: \rhd\lhd(X_1,..., X_k)$ i $J_2: \rhd\lhd(R_1,..., R_n)$ dve potpune zavisnosti spoja nad skupom obeležja $\mathcal{U}$. Zavisnost spoja J_1 logički implicira J_2 ako i samo ako

$$(\forall i \in \{1,..., k\})(\exists j \in \{1,..., n\})(X_i \subseteq R_j).$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je $\tau(J_2) = \{l_1, l_2,..., l_n\}$ inicijalni tablo zavisnosti spoja J_2. Tada, za svako $j \in \{1,..., n\}$, važi $\widetilde{l}_j = R_j$, gde je $\widetilde{l}_j$ skup obeležja, za koji vrsta l_j sadrži poznate promenljive. Neka je, dalje, za svako $i \in \{1,..., k\}$, $X_i \subseteq R_{j_i}$. Tada je $X_i \subseteq \widetilde{l}_{j_i}$, te, za svako s, $t \in \{1,..., k\}$, važi $\widetilde{l}_{j_s}[X_s \cap X_t] = \widetilde{l}_{j_t}[X_s \cap X_t]$. Primena implikacionog algoritma, odnosno zavisnosti spoja $\rhd\lhd(X_1,..., X_k)$, na tablo $\tau(J_2)$, dovodi do generisanja vrste l, za koju važi $l[X_i] = l_{j_i}[X_i]$, za svako $i \in \{1,..., k\}$. Pošto je $X_i \subseteq \widetilde{l}_{j_i}$, vrsta l će sadržati samo karakteristične promenljive, te se, saglasno teoremi 5.12, dokazanoj u [ML], zaključuje da važi $J_1 \models J_2$.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavlja se da važi $J_1 \models J_2$, ali da postoji $X_m \in \{X_1,..., X_k\}$ takav, da za svako $R_j \in \{R_1,..., R_n\}$ važi $X_m \not\subseteq R_j$. Saglasno tome, važiće $(\forall l_j \in \tau(J_2))(\exists A \in X_m)(l_j[A] = \beta_A)$. Nakon primene implikacionog algoritma na $\tau(J_2)$, važi će

$$(\forall l \in chase_{J_1}(\tau(J_2)))(\forall i \in \{1,..., k\})(\exists l_i \in chase_{J_1}(\tau(J_2))(l_i[X_i] = l[X_i]).$$

Pošto skup zavisnosti, koji se primenjuje na inicijalni tablo $\tau(J_2)$ u implikacionom algoritmu, sadrži samo zavisnost spoja J_1, a ne i funkcionalne zavisnosti, važiće

$$(\forall l \in chase_{J_1}(\tau(J_2)))(\exists A \in X_m)(l[A] = \beta_A).$$

Pošto u $chase_{J_1}(\tau(J_2))$ ne postoji vrsta, koja sadrži samo karakteristične promenljive na osnovu teoreme 5.12*), sledi $\neg(J_1 \models J_2)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

Teorema 1.1 definiše potreban i dovoljan uslov, koji treba da zadovolji zavisnost spoja J_2 da bi predstavljala logičku posledicu zavisnosti spoja J_1. To dalje znači da svaka relacija nad skupom obeležja $\mathcal{U}$ koja zadovoljava J_1, zadovoljava i J_2. Ako se sa $SAT(\mathcal{U}, J)$ obeleži skup svih relacija, koje zadovoljavaju zavisnost spoja J, tada važi sledeća implikacija

$$J_1 \models J_2 \Rightarrow SAT(\mathcal{U}, J_1) \subseteq SAT(\mathcal{U}, J_2).$$

Primer 1.6. Neka je $J_1 : \triangleright\!\triangleleft(ABC, CD)$, a $J_2 : \triangleright\!\triangleleft(AB, BC, CD)$. Zavisnosti spoja J_1 i J_2 ne zadovoljavaju uslov teoreme 1.1. To potvrđuju i tabloi $\tau(J_2)$ i $chase_{J_1}(\tau(J_2))$, prikazani, redom, na slikama 1.11 i 1.12.

	A	B	C	D
l_1	α_A	α_B	β_C^1	β_D^1
l_2	β_A^2	α_B	α_C	β_D^2
l_3	β_A^3	β_B^3	α_C	α_D

Slika 1.11.

	A	B	C	D
l_1	α_A	α_B	β_C^1	β_D^1
l_2	β_A^2	α_B	α_C	β_D^2
l_3	β_A^3	β_B^3	α_C	α_D
l_4	β_A^2	α_B	α_C	α_D
l_5	β_A^3	α_B	α_C	β_D^2

Slika 1.12.

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_2	d_2

A	B
a_1	b_1
a_2	b_1

B	C
b_1	c_1
b_1	c_2

C	D
c_1	d_1
c_2	d_2

Slika 1.13.

Na slici 1.13 je prikazana relacija $r(ABCD)$, koja zadovoljava zavisnost spoja $\triangleright\!\triangleleft(ABC, CD)$, kao i njene projekcije na komponente zavisnosti spoja $\triangleright\!\triangleleft(AB, BC, CD)$. Na slici 1.14 je data relacija $r(AB) \triangleright\!\triangleleft r(BC) \triangleright\!\triangleleft r(CD)$. Očigledno, relacija $r(ABCD)$ ne zadovoljava zavisnost spoja $\triangleright\!\triangleleft(AB, BC, CD)$, čime se ilustruje tvrđenje $\neg(SAT(\mathcal{U}, J_1) \subseteq SAT(\mathcal{U}, J_2) \Rightarrow \neg(J_1 \models J_2)$. Lako se proverava da važi $J_2 \models J_1$. □

*) iz knjige "Principi baza podataka", autora Mogin P, Luković I.

$r(AB) \triangleright\triangleleft r(BC) \triangleright\triangleleft r(CD) =$

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_2	d_2

Slika 1.14.

1.2.2. Funkcionalne zavisnosti i dekompozicija

U praksi se projektovanje šeme baze podataka, po pravilu, izvodi u uslovima kada skup zadatih ograničenja sadrži funkcionalne zavisnosti i, eventualno, jednu zavisnost spoja.

Stav 1.1. Ako skup ograničenja sadrži zavisnosti spoja i funkcionalne zavisnosti, tada "ako" deo teoreme 1.1 i dalje važi. □

Ako inicijalni skup ograničenja sadrži samo funkcionalne zavisnosti, javlja se pitanje kako dekomponovati šemu univerzalne relacije, pa da rezultantna dekompozicija poseduje osobinu spoja bez gubitaka. Odgovor na ovo pitanje daje se u narednom tekstu. U tom cilju se definiše i naredna lema.

Lema 1.1. Ako $S = \{(R_i, \mathcal{F}_i) \mid i = 1,\ldots, n\}$ nije dekompozicija sa spojem bez gubitaka šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, tada važi

$$(1.5) \qquad (\exists r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F}))(r \subset \mathop{\triangleright\triangleleft}_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(r)).$$

Dokaz. Neka je r u $SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, a t u r. Ako je t u r, tada je $t[R_i]$ u svakom $\pi_{R_i}(r)$. Znači, generalno važi

$$(1.6) \qquad (\forall r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F}))(r \subseteq \mathop{\triangleright\triangleleft}_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(r)).$$

Saglasno definiciji 1.1, ako S nije dekompozicija sa spojem bez gubitaka, tada važi

$$(1.7) \qquad (\exists r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F}))(r \neq \mathop{\triangleright\triangleleft}_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(r)).$$

Na osnovu (1.6) i (1.7) se zaključuje da tvrđenje S nije dekompozicija sa spojem bez gubitaka ekvivalentno sa $(\exists r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F}))(r \subset \mathop{\triangleright\triangleleft}_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(r))$, čime je lema dokazana. □

Naredna teorema uvodi važan potreban i dovoljan uslov, koji treba da bude zadovoljen, da bi skup šema relacija predstavljao dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, s obzirom na skup funkcionalnih zavisnosti.

Teorema 1.2. Neka je $S = \{(R_1, \mathcal{F}_1), (R_2, \mathcal{F}_2)\}$ jedna dekompozicija šeme univerzalne relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, gde je $\mathcal{U} = R_1R_2$. Skup šema relacija S je dekompozicija sa spojem bez gubitaka, s obzirom na $\mathcal{F}$, ako i samo ako važi

$$R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1\setminus R_2 \in \mathcal{F}^+ \text{ ili } R_1 \cap R_2 \rightarrow R_2\setminus R_1 \in \mathcal{F}^+. \tag{1.8}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavlja se da S ne predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, a da uslov (1.8) važi. Tada, na osnovu leme 1.1, za neko $r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ važi $r \subset r_1 \bowtie r_2$, gde je $r_1 = \pi_{R_1}(r)$ i $r_2 = \pi_{R_2}(r)$. To znači da postoji torka t u $r_1 \bowtie r_2$ takva, da t nije u r. Ako je t u $r_1 \bowtie r_2$, tada je $t[R_1 \cap R_2, R_1\setminus R_2]$ u r_1, a $t[R_1 \cap R_2, R_2\setminus R_1]$ u r_2. Dalje, $t \notin r \wedge t[R_1 \cap R_2, R_1\setminus R_2] \in r_1 \wedge t[R_1 \cap R_2, R_2\setminus R_1] \in r_2$, ukazuje da u r postoje torke u i v takve, da je $u[R_1 \cap R_2] = v[R_1 \cap R_2]$ i $u[R_1\setminus R_2] \neq v[R_1\setminus R_2]$ i $u[R_2\setminus R_1] \neq v[R_2\setminus R_1]$. Od torki u i v su dobijene $t[R_1]$ i $t[R_2]$. Međutim, postojanje torki u i v je u kontradikciji sa tvrđenjem (1.8).

($\Leftarrow$) Pretpostavlja se da je S dekompozicija sa spojem bez gubitaka, a da ne važi (1.8). Neka je $r = \{u, v\}$ takva relacija, da je $u[R_1 \cap R_2] = v[R_1 \cap R_2]$ i $u[R_1\setminus R_2] \neq v[R_1\setminus R_2]$ i $u[R_2\setminus R_1] \neq v[R_2\setminus R_1]$. Tada $\pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r)$ sadrži torku t takvu, da je $t[R_1\setminus R_2] \neq v[R_1\setminus R_2]$ i $t[R_2\setminus R_1] = v[R_2\setminus R_1]$, te je $r \subset \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da S predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka. □

$r_1 \bowtie r_2 =$

$R_1\cap R_2$	$R_1\setminus R_2$	$R_2\setminus R_1$	
1	2	2	t

$r_1 =$

$R_1\cap R_2$	$R_1\setminus R_2$	
1	2	$t[R_1]$, $u[R_1]$
1	1	$v[R_1]$

$r_2 =$

$R_1\cap R_2$	$R_2\setminus R_1$	
1	2	$t[R_2]$, $v[R_2]$
1	1	$u[R_2]$

$r =$

$R_1\cap R_2$	$R_1\setminus R_2$	$R_2\setminus R_1$	
1	2	1	u
1	1	2	v

Slika 1.15.

Postupak dokazivanja teoreme 1.2 ilustrovan je na slici 1.15. U praćenju ako dela dokaza, kreće se od relacije $r_1 \bowtie r_2$ i, postupno zaključuje koje torke mora sadržati relacija r. U praćenju "samo ako" dela dokaza teoreme, polazi se od sadržaja relacije r i zaključuje šta mora sadržati relacija $r_1 \bowtie r_2$.

Primer 1.7. Teorema 1.2 ukazuje zašto dekompozicija $S = \{(\{A, B\}, \{A \to B\}), (\{B, C\}, \{C \to B\})\}$ iz primera 1.4 ne predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka. Naime, ni funkcionalna zavisnost $B \to A$, ni funkcionalna zavisnost $B \to C$ nije u $\mathcal{F}^+$.

Dekompozicija $S' = \{(\{A, B\}, \{A \to B\}), (\{A, C\}, \{\})\}$ predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, ali ne zadovoljava uslov $\mathcal{F}^+ = (\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i)^+$. □

Teorema 1.2 ukazuje na jedan od načina za rešavanje implikacionog problema $\mathcal{F} \models \rhd\!\lhd(R_1, R_2)$. Postupak se svodi na izračunavanje $(R_1 \cap R_2)^+_{\mathcal{F}}$ i proveru da li je zadovoljeno $R_1 \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_{\mathcal{F}}$ ili $R_2 \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_{\mathcal{F}}$. U opštem slučaju, ovaj postupak je jednostavniji od primene implikacionog algoritma.

Jednu od posledica teoreme 1.2 predstavlja i zaključak da, ako važi uslov (1.8), tada $R_1 \cap R_2$ sadrži ključ ili šeme relacije R_1 ili R_2. Naime, primenom pravila izvođenja "proširenje" na uslov (1.8), (proširenjem (1.8) sa $R_1 \cap R_2$) dobija se

$$R_1 \cap R_2 \to R_1 \in \mathcal{F}^+ \text{ ili } R_1 \cap R_2 \to R_2 \in \mathcal{F}^+,$$

te se zaključuje da $R_1 \cap R_2$ predstavlja jedan superključ za šemu relacije $(R_1, \mathcal{F}_1)$ ili za šemu relacije $(R_2, \mathcal{F}_2)$. Neka je zadovoljeno $R_1 \cap R_2 \to R_1 \in \mathcal{F}^+$. Proširenjem ove funkcionalne zavisnosti sa R_2, dobija se $R_2 \to R_1R_2 \in \mathcal{F}^+$. Pošto je $\mathcal{U} = R_1R_2$, zaključuje se da R_2 sadrži ***ključ*** šeme univerzalne relacije.

Stav 1.2. Neka je $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ šema univerzalne relacije, $X \to Y$ funkcionalna zavisnost u $\mathcal{F}$, a $r \in SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Tada je $r = \pi_{XY}(r) \rhd\!\lhd \pi_{X(\mathcal{U} \setminus Y)}(r)$.

Dokaz. Sledi na osnovu teoreme 1.2, jer je $X = XY \cap X(\mathcal{U} \setminus Y)$, a X je ključ šeme relacije $(XY, \{X \to Y\})$. □

Stav 1.2 ukazuje na postupak takvog ***dekomponovanja*** šeme relacije $(R, \mathcal{F})$, koji će rezultovati u dekompoziciji sa spojem bez gubitaka. Prema tom postupku, rastavljanje se vrši izborom jedne funkcionalne zavisnosti $X \to Y$ iz $\mathcal{F}$, gde su X i Y ne nužno disjunktni skupovi obeležja i formiranjem dve nove šeme relacija $(X(R \setminus Y), \mathcal{F}|_{X(R \setminus Y)})$ i $(XY, \mathcal{F}|_{XY})$.

Sledeća teorema ukazuje na postupak dekomponovanja, sa spojem bez gubitaka, šeme univerzalne relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, na n (>2) šema relacija.

Teorema 1.3. Neka je $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ šema univerzalne relacije, $S = \{(R_i, \mathcal{F}_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ jedna dekompozicija sa spojem bez gubitaka, s obzirom na $\mathcal{F}$, a $S' = \{(R_{i_j}, \mathcal{F}_{i_j}) \mid j = 1, 2, \dots, k\}$ jedna dekompozicija sa spojem bez gubitaka, s obzirom na $\mathcal{F}_i$, šeme relacije $(R_i, \mathcal{F}_i) \in S$. Skup šema relacija $\{(R_j, \mathcal{F}_j) \mid j = 1, \dots, i-1, i_1, i_2, \dots, i_k, i+1, \dots, m\}$ takođe predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka.

Dokaz. Dokaz sledi na osnovu asocijativnosti operacije prirodnog spoja. Ako je S' dekompozicija sa spojem bez gubitaka, relacija r_i nad $(R_i, \mathcal{F}_i)$ se može rekonstruisati prirodnim spajanjem relacija $r_{i_1}, \dots, r_{i_k}$, dobijenih njenim projektovanjem, redom, na skupove obeležja $R_{i_1}, \dots, R_{i_k}$. Pošto je i S dekompozicija sa spojem bez gubitaka, polazna relacija r

nad $({}'\mathcal{U}, {}'\mathcal{F})$ se može rekonstruisati prirodnim spajanjem relacija $r_1, \ldots, r_m$, dobijenih njenim projektovanjem, redom, na skupove obeležja $R_1, \ldots, R_m$. □

Teoreme 1.2 i 1.3 i stav 1.2 sugerišu da dekomponovanje šeme univerzalne relacije treba vršiti postupnim rastavljanjem na po dve šeme relacije tako, da bude zadovoljen uslov (1.8).

Primer 1.8. Neka je ${}'\mathcal{U} = \{A, B, C, D\}$, ${}'\mathcal{F} = \{A \to B, B \to C, C \to D\}$. Skup šema relacija $S_1 = \{(\{A, B, C\}, \{A \to B, B \to C\}), (\{C, D\}, \{C \to D\})\}$ je dekompozicija sa spojem bez gubitaka, s obzirom na ${}'\mathcal{F}$, jer je C ključ šeme relacije $(\{C, D\}, \{C \to D\})$. Skup šema relacija S_1 je dobijen dekomponovanjem šeme $({}'\mathcal{U}, {}'\mathcal{F})$ na osnovu funkcionalne zavisnosti $C \to D$. Skup šema relacija $S_2 = \{(\{A, B\}, \{A \to B\}), (\{B, C\}, \{B \to C\}), (\{C, D\}, \{C \to D\})\}$, takođe predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, s obzirom na ${}'\mathcal{F}$. Dobijen je od skupa šema relacija S_1, dekomponovanjem šeme relacije $(\{A, B, C\}, \{A \to B, B \to C\})$ na osnovu funkcionalne zavisnosti $B \to C$. □

Naredna teorema uvodi potreban i dovoljan uslov, koji skup šema relacija S treba da zadovolji da bi predstavljao dekompoziciju sa spojem bez gubitaka, s obzirom na skup funkcionalnih zavisnosti, ugrađen u S. Ovaj uslov je zasnovan na pojmu zatvaranja skupa obeležja, koji je obrađen u [ML], tačka 5.2.5.

Teorema 1.4. Neka je $S = \{(R_i, {}'\mathcal{K}_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ skup šema relacija. S je dekompozicija sa spojem bez gubitaka šeme univerzalne relacije $({}'\mathcal{U}, {}'\mathcal{F})$, gde je ${}'\mathcal{U} = \bigcup_{(R, {}'\mathcal{K}) \in S} R$, a ${}'\mathcal{F} = \{X \to R \mid (\exists (R, {}'\mathcal{K}) \in S)(X \in {}'\mathcal{K})\}$, ako i samo ako važi

$$(\exists (R, {}'\mathcal{K}) \in S)(\forall (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in S)(R_i \subseteq (R)^{+}_{{}'\mathcal{F}}).$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $|S| = 1$, tvrđenje teoreme trivijalno važi. Neka je $|S| > 1$, a $(R, {}'\mathcal{K}) \in S$ takva šema relacije, da važi $(\forall (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in S)(R_i \subseteq (R)^{+}_{{}'\mathcal{F}})$. Pošto su funkcionalne zavisnosti iz ${}'\mathcal{F}$ ugrađene u S putem ključeva šema relacija, postoji neprazan skup šema relacija $S_1 \subseteq (S \setminus \{(R, {}'\mathcal{K})\})$ takav, da važi $(\forall (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in S_1)(\exists X \in {}'\mathcal{K}_i)(X \subseteq R)$. Neka je $T_1 = \{(R, {}'\mathcal{K})\} \cup S_1$, ${}'\mathcal{U}_1 = \bigcup_{(R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in T_1} R_i$, a ${}'\mathcal{F}_1 = \{X \to R_i \mid (\exists (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in T_1)(X \in {}'\mathcal{K}_i)\}$. Na osnovu teorema 1.2 i 1.3 sledi da skup šema relacija T_1 predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme relacije $({}'\mathcal{U}_1, {}'\mathcal{F}_1)$, jer za svako r_1 iz $SAT({}'\mathcal{U}_1, {}'\mathcal{F}_1)$ važi

$$r_1 = \mathop{\bowtie}_{(R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in S_1} (\pi_R(r_1) \bowtie \pi_{R_i}(r_1)).$$

Ako je $T_1 = S$, dokaz je završen.

Neka je $S_2 \subseteq (S \setminus T_1)$ takav skup šema relacija, da važi $(\forall (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in S_2)(\exists X \in {}'\mathcal{K}_i)(X \subseteq {}'\mathcal{U}_1)$. Neka je $T_2 = \{({}'\mathcal{U}_1, {}'\mathcal{F}_1)\} \cup S_2$, ${}'\mathcal{U}_2 = \bigcup_{(R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in T_2} R_i$, a ${}'\mathcal{F}_2 = \{X \to R_i \mid (\exists (R_i, {}'\mathcal{K}_i) \in T_2)(X \in {}'\mathcal{K}_i)\}$. Na osnovu teorema 1.2 i 1.3 sledi da skup šema relacija T_2 predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme relacije $({}'\mathcal{U}_2, {}'\mathcal{F}_2)$.

Pošto su sve funkcionalne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$ ugrađene u šeme relacija iz S putem ključeva, ključ svake šeme relacije iz skupa $S\backslash\{(R, \mathcal{K})\}$ će biti sadržan u nekom skupu obeležja $\mathcal{U}_i$ $(i \geq 1)$. Nakon konačnog broja primena opisanog postupka, dobija se skup šema relacija $T_m = S$ $(m \geq 1)$, koji predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme relacije $(\mathcal{U}_m, \mathcal{F}_m)$. Pošto je $T_m = S$, sledi $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}$. Znači, skup šema relacija S je dobijen postupnim rastavljanjem šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ na osnovu funkcionalnih zavisnosti iz $\mathcal{F}$, te saglasno teoremama 1.2 i 1.3 predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka.

($\Leftarrow$) Neka je $S = \{(R_i, \mathcal{K}_i) | i = 1,..., n\}$ dekompozicija šeme relacije $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sa spojem bez gubitaka, što je ekvivalentno tvrđenju da svako r iz $SAT(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ zadovoljava zavisnost spoja $\triangleright\triangleleft(R_1,..., R_n)$. Neka su S_i i S_j takvi neprazni podskupovi skupa S, za koje važi $S_i \cup S_j = S$, a, za $k \in \{i, j\}$, $\mathcal{U}_k = \bigcup_{(R_k, \mathcal{K}_k) \in S_k} R_k$. Na osnovu teoreme 1.1 sledi

$$(1.9) \qquad \triangleright\triangleleft(R_1,..., R_n) \Rightarrow \triangleright\triangleleft(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j),$$

jer za svako $l \in \{1,..., n\}$ važi $R_l \subseteq \mathcal{U}_i$ ili $R_l \subseteq \mathcal{U}_j$. Na osnovu teoreme 1.2 sledi $\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{F}^+$ ili $\mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{F}^+$, što ukazuje da $\mathcal{U}_i$ ili $\mathcal{U}_j$ sadrži ključ šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Pošto implikacija (1.9) važi za svaka dva podskupa S_i i S_j skupa S, zaključuje se da važi

$$(\exists(R, \mathcal{K}) \in S)(R \rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{F}^+).$$

Inače bi postojali podskupovi S_i i S_j skupa S, za koje ni $\mathcal{U}_i$ ni $\mathcal{U}_j$ ne sadrži ključ šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, jer bi svaki od njih sadržao samo pravi podskup ključa šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Na osnovu $R \rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{F}^+$, sledi $(\forall R_i \subseteq \mathcal{U})(R \rightarrow R_i \in \mathcal{F}^+)$ i $(\forall R_i \subseteq \mathcal{U})(R_i \subseteq (R)_{\mathcal{F}}^+)$, što je i trebalo dokazati. □

Primer 1.9. Neka je $S = \{(\{A, B, D\}, \{A\}), (\{C, D\}, \{D\}), (\{B, C, E\}, \{BC\})\}$. Tada je $\mathcal{U} = \{A, B, C, D, E\}$, a $\mathcal{F} = \{A \rightarrow BD, D \rightarrow C, BC \rightarrow E\}$. Lako se proverava da su uslovi teoreme 1.4 zadovoljeni.

Pošto šema relacije $(\{A, B, D\}, \{A\})$ sadrži ključ šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, važi $S_1 = \{(\{C, D\}, \{D\})\}$. Šeme relacija $(\{A, B, D\}, \{A\})$ i $(\{C, D\}, \{D\})$ predstavljaju dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme $(\mathcal{U}_1, \mathcal{F}_1)$, gde je $\mathcal{U}_1 = \{A, B, C, D\}$, a $\mathcal{F}_1 = \{A \rightarrow BD, D \rightarrow C\}$. Na osnovu $\{B, C\} \subseteq \mathcal{U}_1$, zaključuje se da je $S_2 = \{(\{B, C, E\}, \{BC\})\}$, te sledi da šeme relacija $(\{A, B, C, D\}, \{A \rightarrow BD, D \rightarrow C\})$ i $(\{B, C, E\}, \{BC\})$ predstavljaju dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Kako šeme relacija $(\{A, B, D\}, \{A\})$ i $(\{C, D\}, \{D\})$ predstavljaju dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme $(\{A, B, C, D\}, \{A \rightarrow D, D \rightarrow C\})$, sledi da i S predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. □

Ako uslov teoreme 1.4 nije zadovoljen, skup šema relacija S ne predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka.

Primer 1.10. Neka je $S = \{(\{A, B\}, \{A\}), (\{B, C\}, \{C\}), (\{B, D\}, \{B\})\}$. Tada je $\mathcal{U} = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{F} = \{A \rightarrow B, C \rightarrow B, B \rightarrow D\}$. Dekompozicija S ne sadrži šemu relacije sa ključem AC šeme $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, te važi $(\forall(R_k, \mathcal{F}_k) \in S)(\exists(R_i, \mathcal{F}_i) \in S)(R_i \not\subseteq (R_k)_{\mathcal{F}}^+)$.

prikazana pojava r nad šemom $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, dok je na slici 1.17 prikazana relacija $\pi_{AB}(r) \rhd\lhd \pi_{BC}(r) \rhd\lhd \pi_{BD}(r)$. Pošto je $r \neq \pi_{AB}(r) \rhd\lhd \pi_{BC}(r) \rhd\lhd \pi_{BD}(r)$, zaključuje se da S ne predstavlja dekompoziciju sa spojem bez gubitaka.

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_2	d_1

Slika 1.16.

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_1
a_2	b_1	c_2	d_1

Slika 1.17.

Pošto skup S ne sadrži šemu relacije sa ključem AC šeme univerzalne relacije, postoje podskupovi $S_i = \{(\{A, B\}, \{A\})\}$ i $S_j = \{(\{B, C\}, \{C\}), (\{B, D\}, \{B\})\}$ skupa S, čiji skupovi obeležja ne sadrže ključ AC. □