



# Testiranje statističkih hipoteza

**Predavač: Dr Mirko Savić**

*savicmirko@ef.uns.ac.rs*

*www.ef.uns.ac.rs*

## Definicija:

Hipoteza predstavlja pretpostavku koja je zasnovana na određenim činjenicama (najčešće naučnim ili iskustvenim).

Jednom formirana hipoteza se koristi za izvođenje zaključaka o posmatranom problemu uz pomoć odgovarajućeg statističkog metoda.

## Podela testova:

- Parametarski testovi.
- Neparametarski testovi.

## Definisanje nulte i alternativne hipoteze

Nulta hipoteza  $H_0$  - tvrdnja o vrednosti nekog parametra osnovnog skupa koja se testira. Cilj je da se ta pretpostavka statistički potvrdi ili ospori.

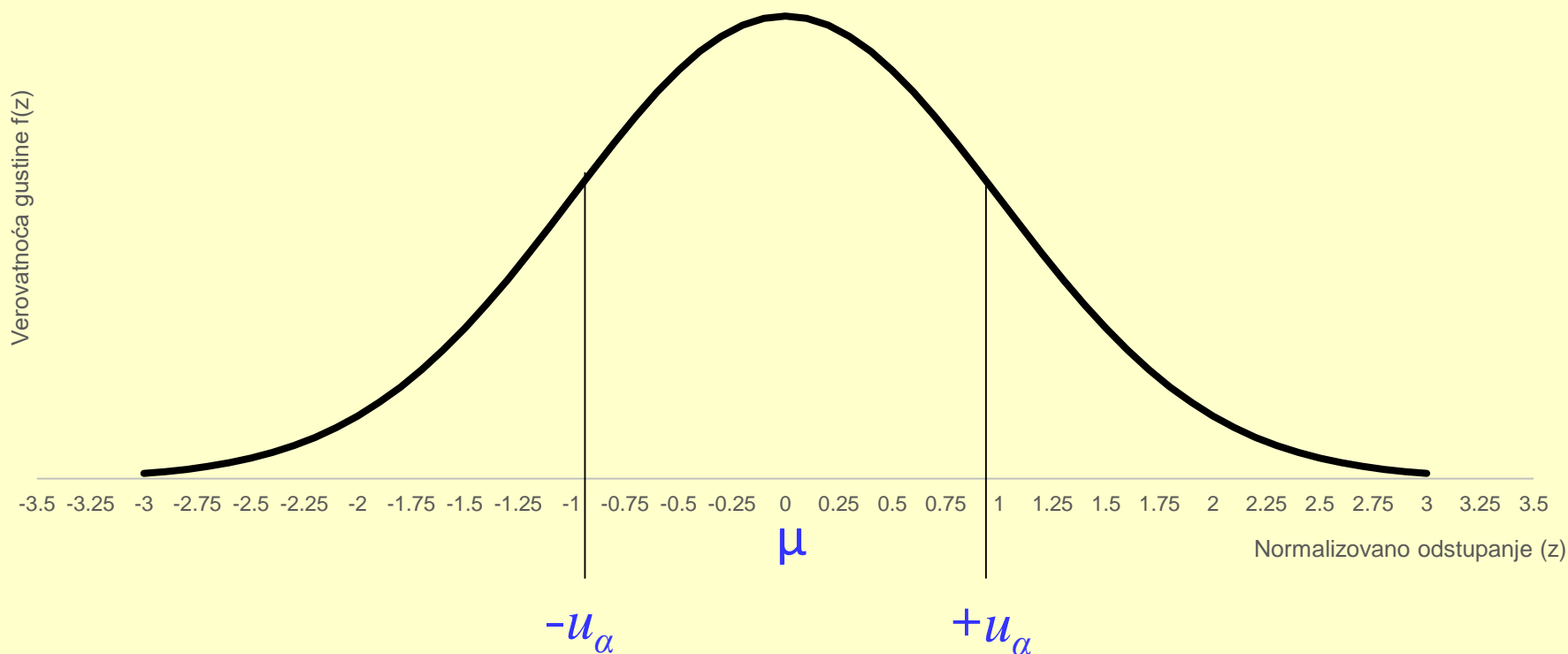
Nasuprot nulte hipoteze  $H_0$ , je alternativna hipoteza  $H_1$ , koja sadrži sve ostale vrednosti parametra osnovnog skupa koje nisu obuhvaćene nultom hipotezom  $H_0$ .

# Hipoteza može da bude prosta ili složena. Postoje tri varijante:

1. Tvrdnja: Prosečna plata u gradu je 1000 evra.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 1000 \quad H_1: \mu \neq \mu_0 = 1000$$

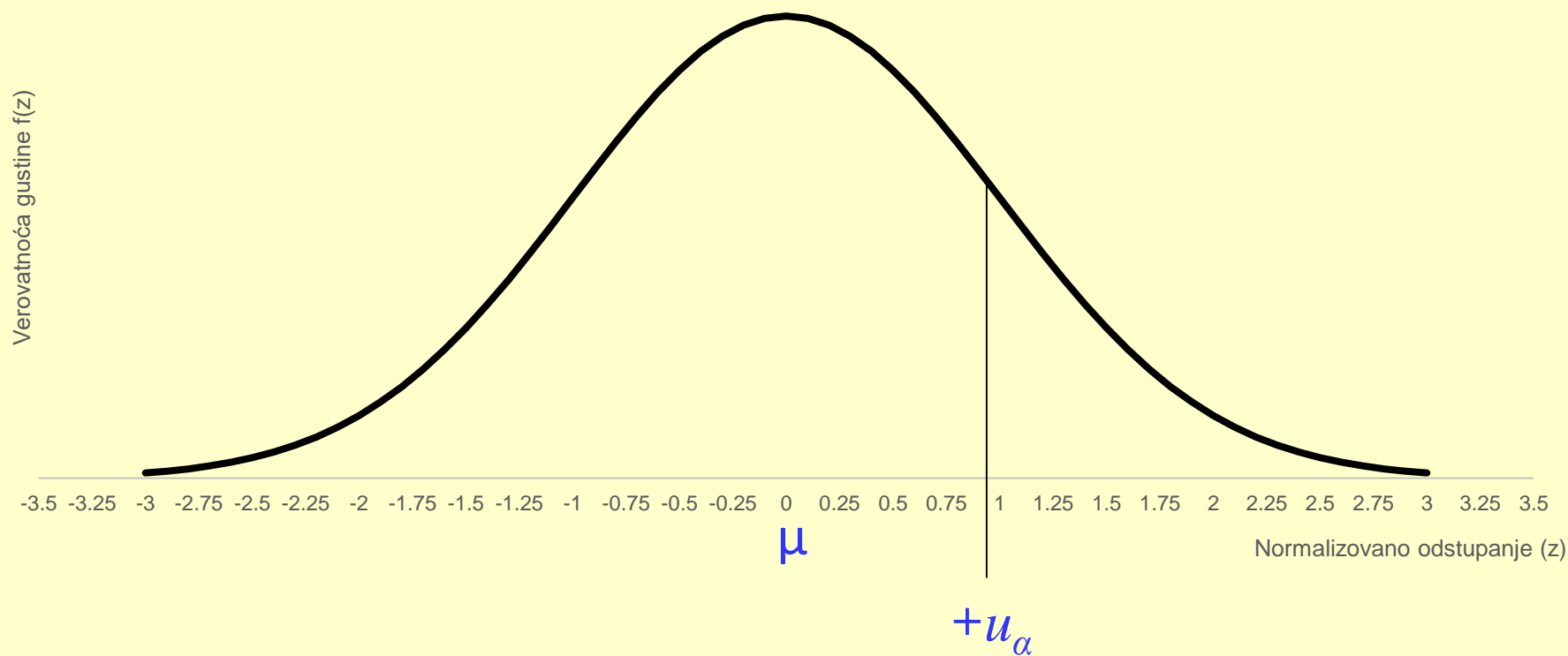
Dvosmerni test ( $\pm u_\alpha$ )



2. Tvrdnja: Prosečna plata u gradu je veća od 500 evra.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 500 \quad H_1: \mu > \mu_0 = 500$$

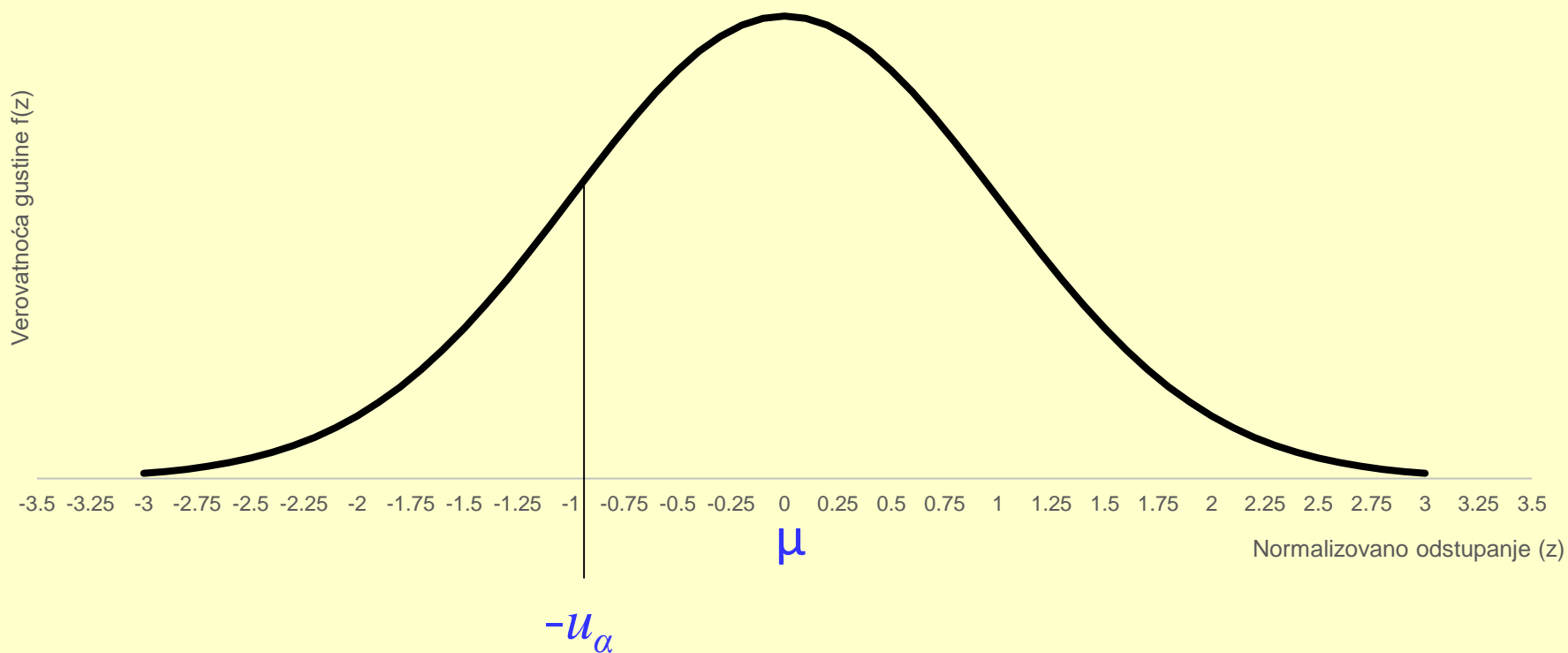
Jednosmerni test sa donjom granicom ( $+u_\alpha$ )



3. Tvrdnja: Prosečna plata u gradu je manja od 1200 evra.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 1200 \quad H_1: \mu < \mu_0 = 1200$$

Jednosmerni test sa gornjom granicom ( $-u_\alpha$ )



# Rizici greške kod testiranja hipoteza

-	Testiranjem $H_0$ se prihvata	Testiranjem $H_0$ se odbacuje
$H_0$ je istinita u osnovnom skupu	Dobra odluka, uz verovatnoću $1-\alpha$	Greška prve vrste, uz verovatnoću $\alpha$
$H_0$ je neistinita u osnovnom skupu	Greška druge vrste, uz uslovnu verovatnoću $\beta$	D o b r a o d l u k a . uz verovatnoću $1-\beta$ (verovatnoća $1-\beta$ se zove "jačina testa" ili "moć testa")

# Testiranje hipoteza primenom " $p$ " vrednosti

Klasičan način testiranja:

Upoređivanje statistike testa ( $u_0$ ) i tablične vrednosti ( $u_\alpha$ ).

“ $p$ ” vrednost- realizovani nivo rizika greške  $\alpha$ .

$\alpha \geq p$   $H_0$  se odbacuje!

$\alpha < p$   $H_0$  se prihvata!



# Uvod u parametarske testove

- Koriste se za proveru hipoteza o nepoznatoj vrednosti parametara osnovnog skupa.
- Primena zavisi od ispunjenja unapred određenih, strogih pretpostavki o osnovnom skupu.



Parametarski testovi se vrše na osnovu nekog od teorijskih rasporeda:

- normalnog rasporeda,
- Studentovog  $t$ -rasporeda,
- Snedekorovog  $F$ -rasporeda,
- binomnog rasporeda.



# Testiranje na osnovu normalnog rasporeda

Uslov:  $n \geq 30$

# Testiranje aritmetičke sredine

Izračunavanje statistike testa:

Kada nije poznata varijansa osnovnog skupa: 
$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}},$$

gde je:

$\bar{x}$  – aritmetička sredina uzorka,

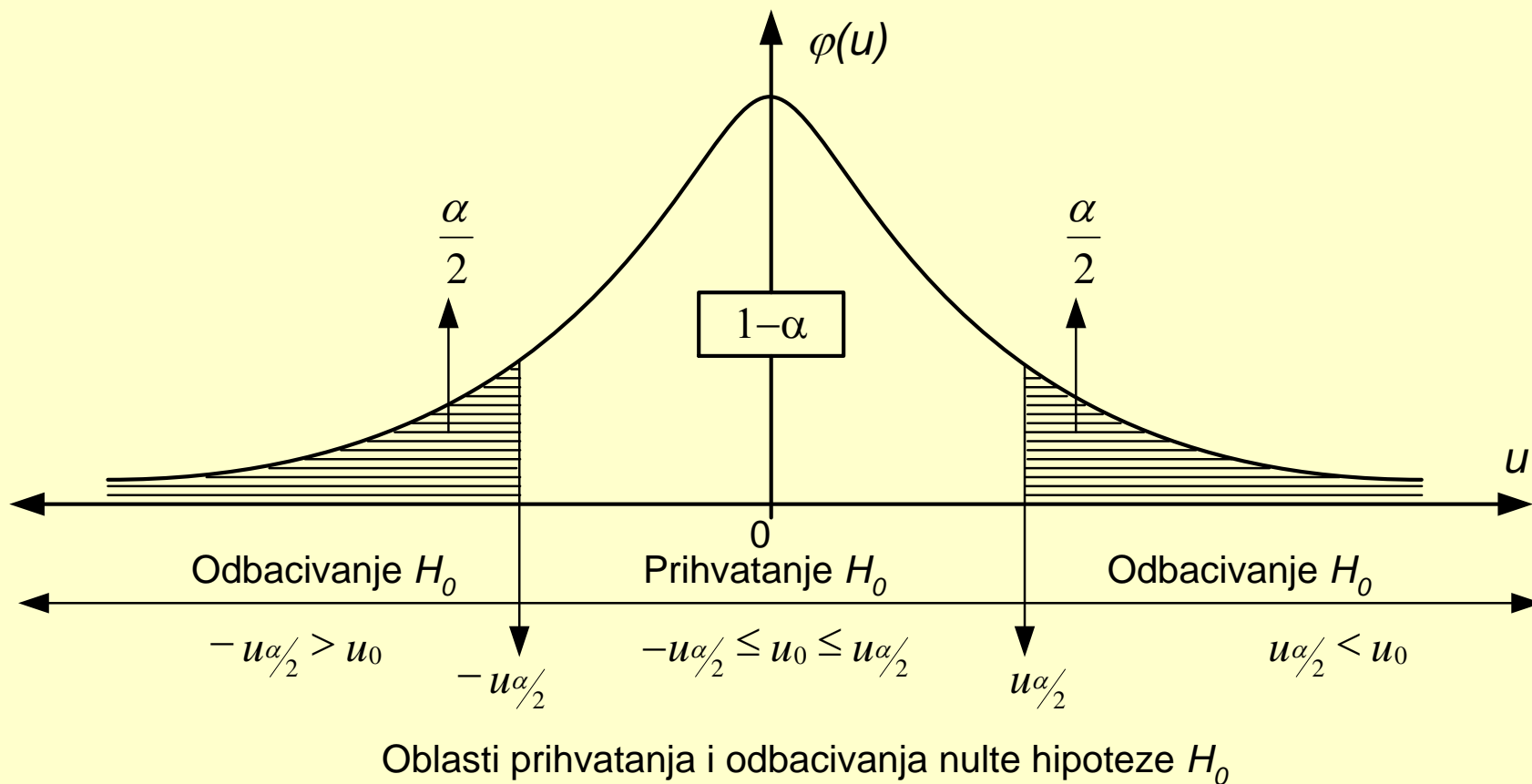
$\mu_0$  – hipotetička vrednost aritmetičke sredine osnovnog skupa,

$S_{\bar{x}}$  – ocena standardne devijacije osnovnog skupa.

# Dvosmerni test:

1. prosta  $H_0$  i složena  $H_1$  (dvosmerni test):

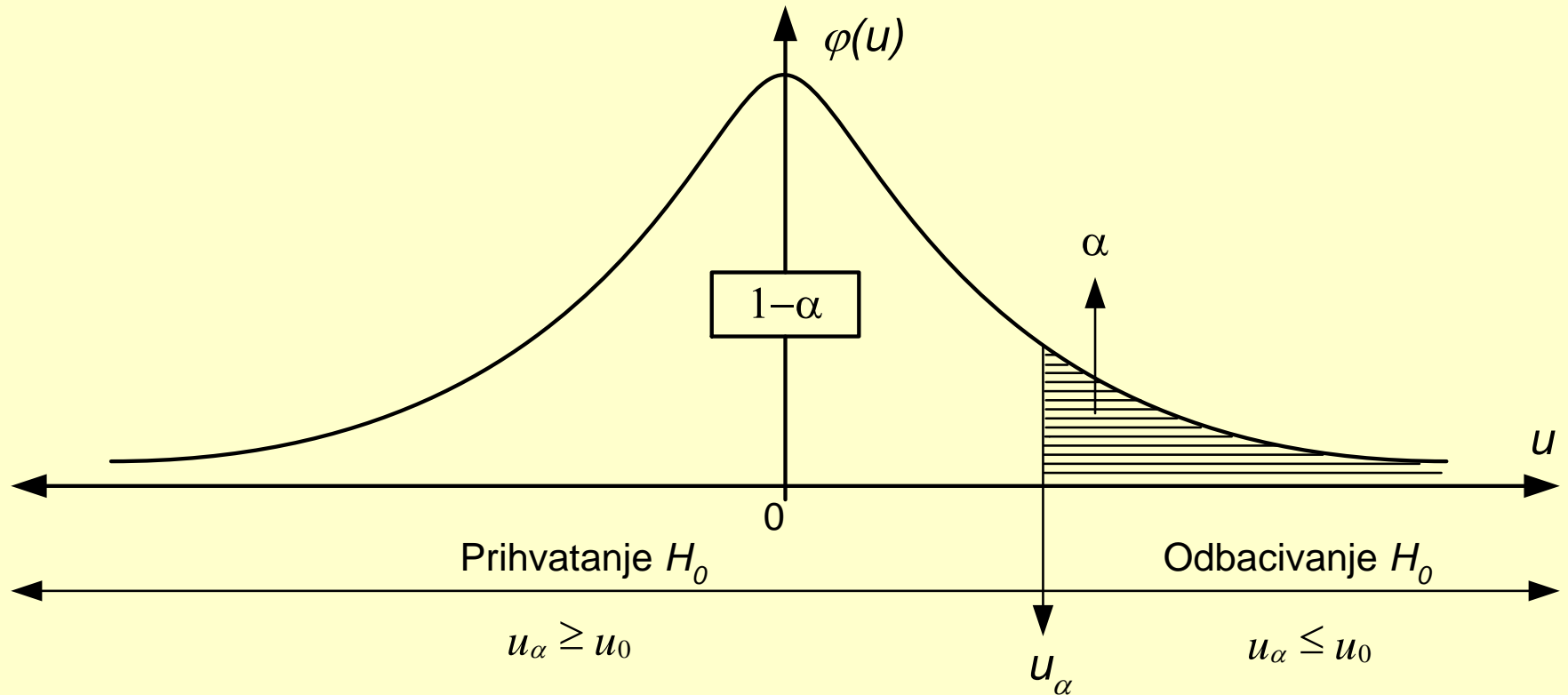
$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$



# Jednosmerni test:

2. složena  $H_0$  i složena  $H_1$  (jednosmerni test):

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu > \mu_0.$$

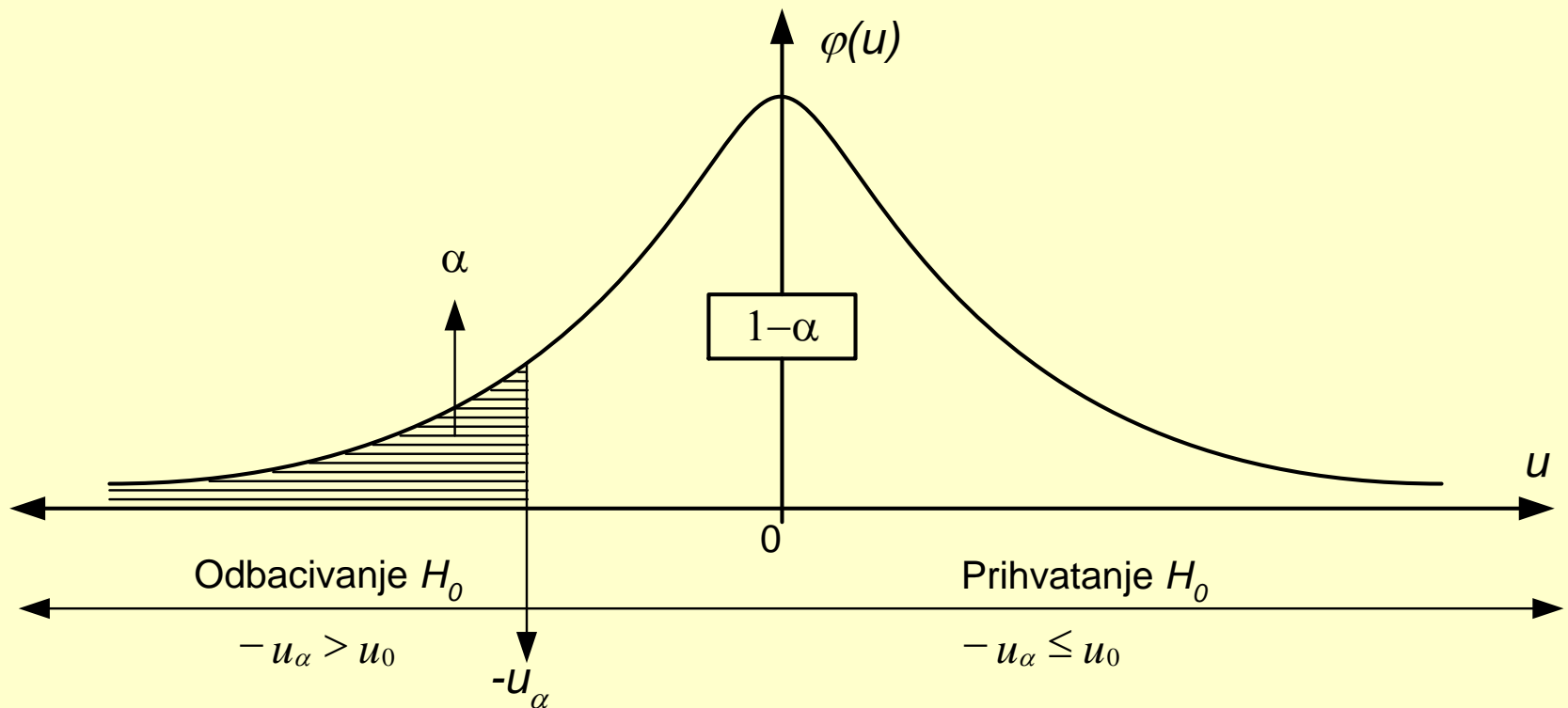


Oblasti prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze  $H_0$

# Jednosmerni test:

3. složena  $H_0$  i složena  $H_1$  (jednosmerni test):

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu < \mu_0.$$



Oblasti prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze  $H_0$

**SOT-241 Testiranje razlike a.s. osnovnog skupa i a.s. uzorka (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

**SOT-243**

**Testiranje aritmetičke sredine, intervalna serija, veliki uzorak (Prilagođeno za rad u Excel-u)**



# Testiranje proporcije

Uslov:  $n \geq 50$

$$u_0 = \frac{p' - P_0}{s_{p'}}$$

gde je:

$p'$  – proporcija u uzorku,

$P_0$  – hipotetička vrednost proporcije u osnovnom skupu,

$s_{p'}$  – ocena srednje mere odstupanja proporcija u uzorcima od proporcije u osnovnom skupu.

**SOT-244 Testiranje proporcije (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

# Testiranje na osnovu Studentovog $t$ -rasporeda

Uslov:  $n < 30$

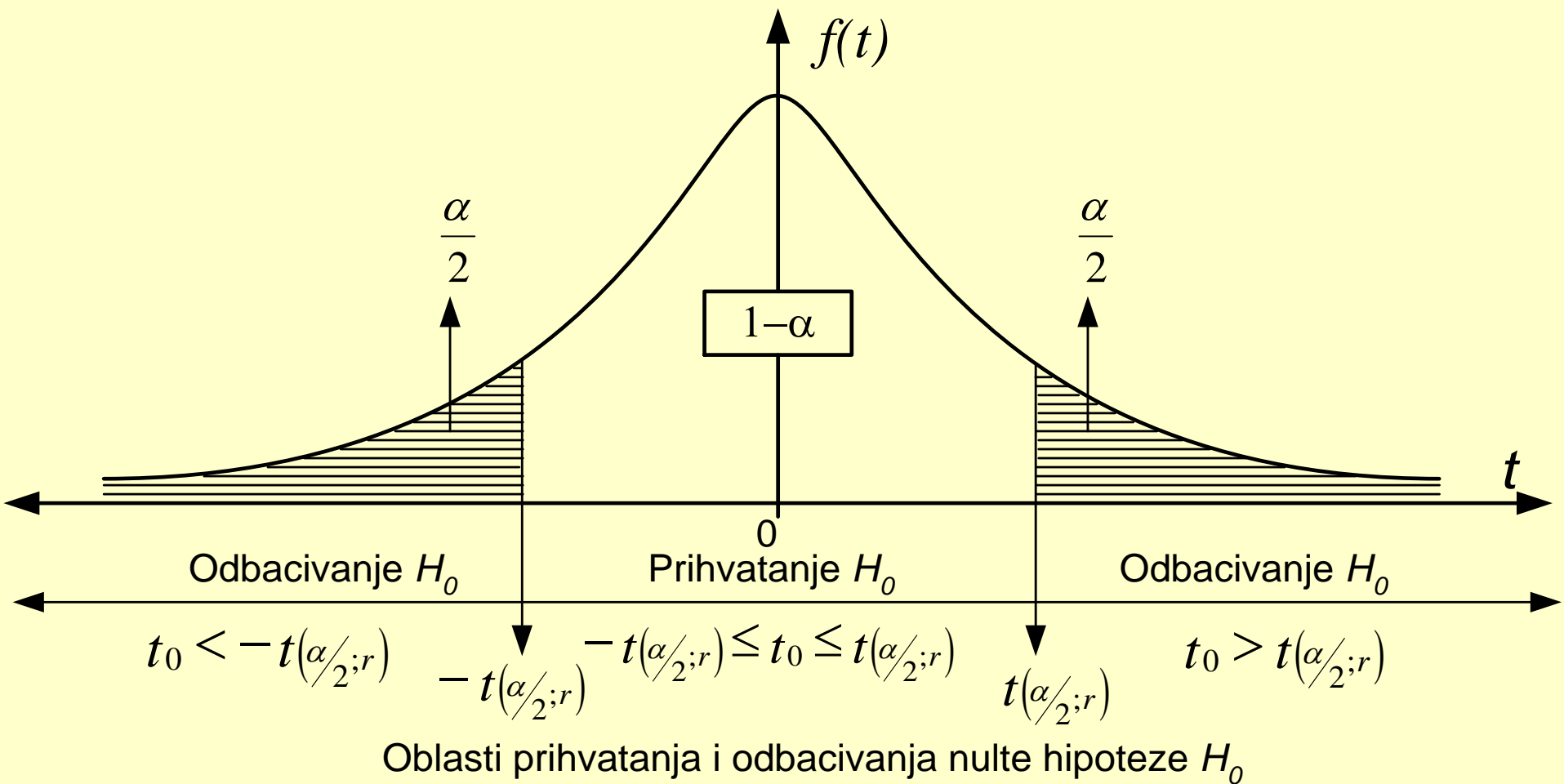
$t_{(a;r)}$

*Goset (Gosset) početkom XX veka*

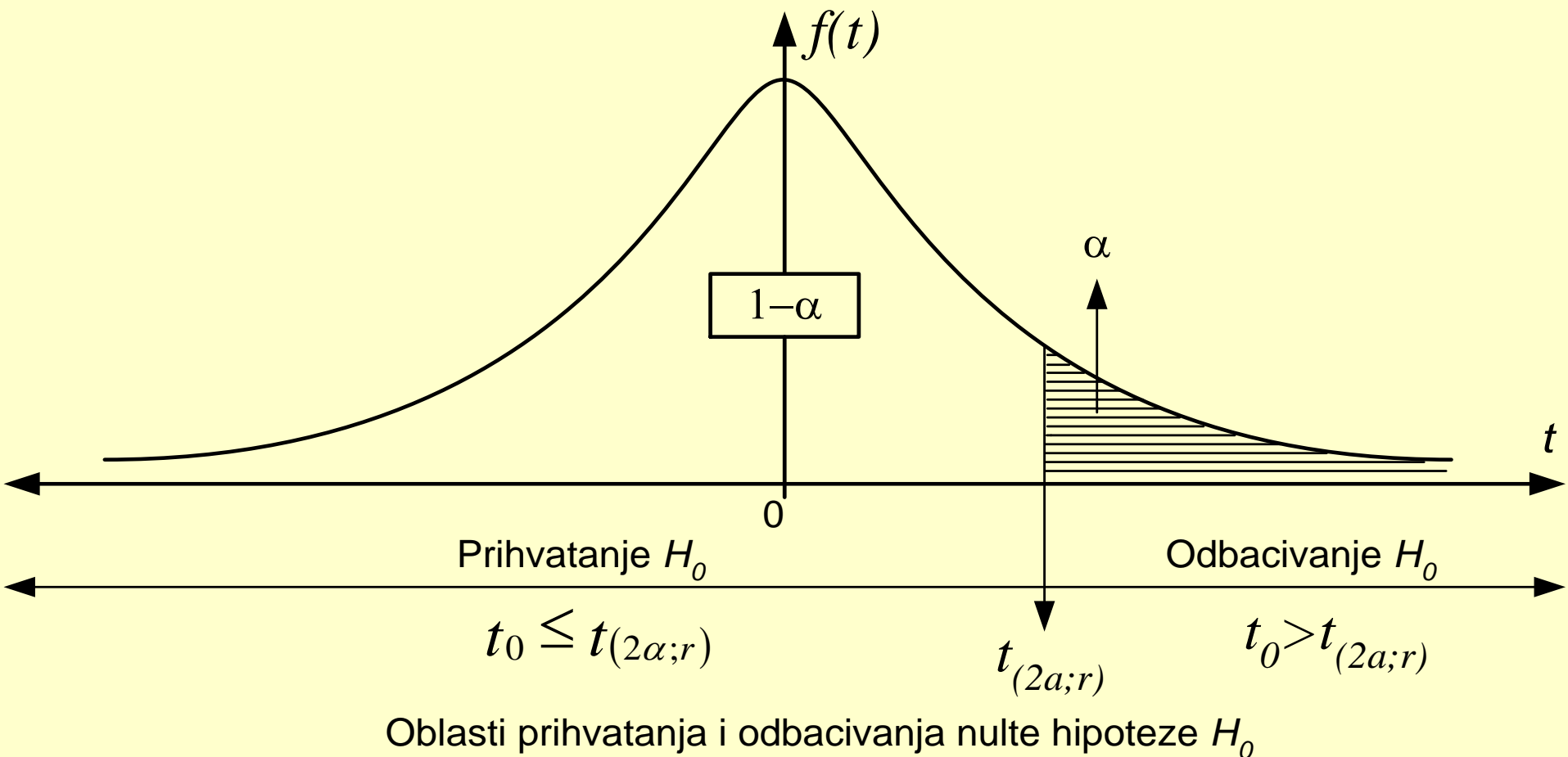
## Testiranje aritmetičke sredine

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}}$$

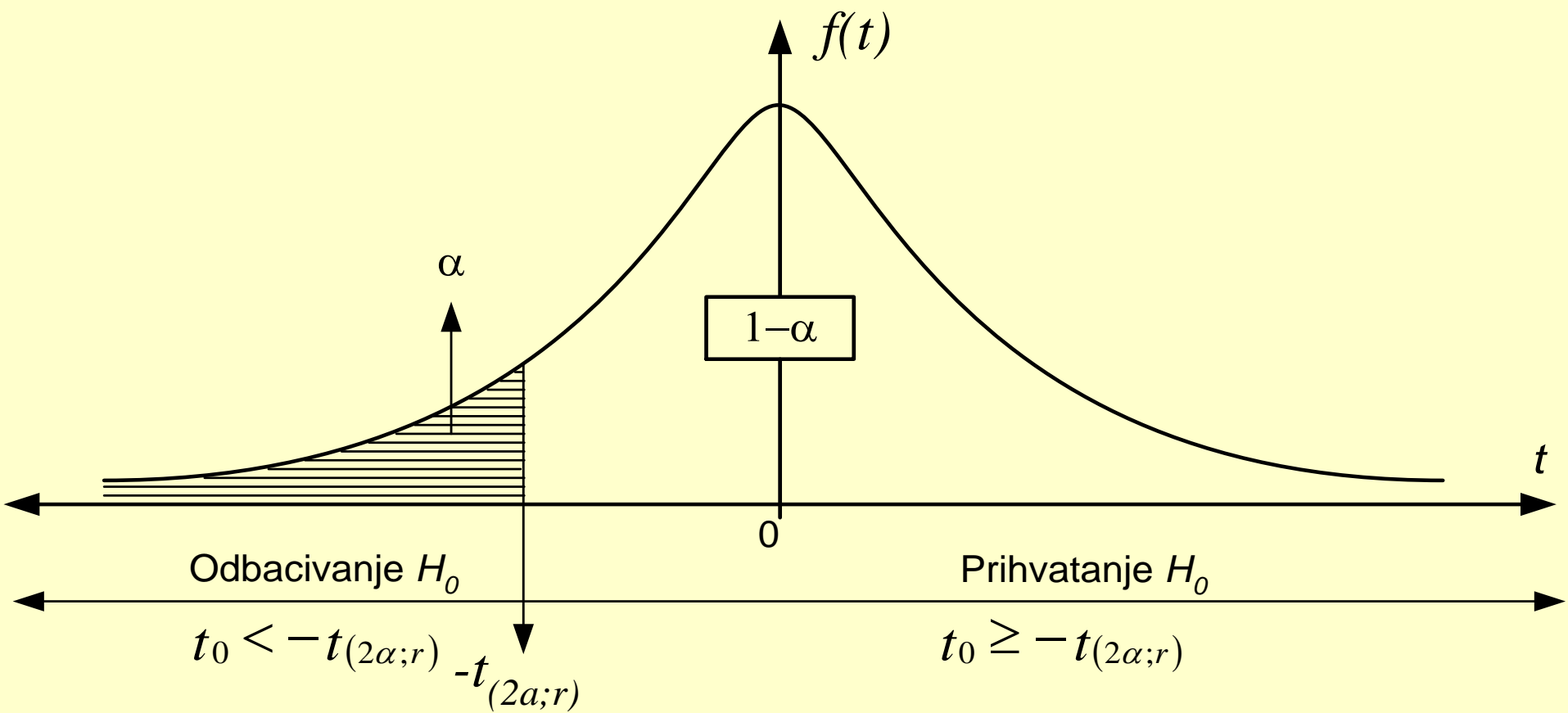
1. prosta  $H_0$  i složena  $H_1$  (dvosmerni test):  $H_0: \mu = \mu_0$ ;  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .



2. složena  $H_0$  i složena  $H_1$  (jednosmerni test):  $H_0: \mu = \mu_0$ ;  $H_1: \mu > \mu_0$ .



3. složena  $H_0$  i složena  $H_1$  (jednosmerni test):  $H_0: \mu = \mu_0$ ;  $H_1: \mu < \mu_0$ .



Oblasti prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze  $H_0$

## **SOT-242**

**Testiranje razlike a.s. osnovnog skupa i a.s. uzorka  
– mali uzorak (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

**SOT-246 Testiranje aritmetičke sredine, negrupisani  
podaci, mali uzorak (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

# Testiranje razlike aritmetičkih sredina dva osnovna skupa

Ranije se radilo posebno za velike a posebno za male uzorke.

Obavezno testiranje homogenosti varijansi kod nezavisnih uzoraka. Ako je  $p < 0,01$  varijansa nije homogena!

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

**SOT-249 Testiranje razlike a.s. dva zavisna uzorka (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

**SOT-245 Testiranje razlike a.s. dva uzorka (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

**SOT-247 Testiranje razlike a.s. dva uzorka, grupisani podaci, mali uzorci (Prilagođeno za rad u Excel-u)**

# Analiza varijanse (disperziona analiza; ANOVA)

Definicija:

Matematičko-statistički postupak pomoću kojeg se testira značajnost razlike između aritmetičkih sredina iz tri i više uzoraka.

Može se ispitivati uticaj:

- jednog faktora varijabiliteta,
- dva faktora varijabiliteta,
- dva faktora varijabiliteta sa više opservacija (posmatranja).



# Analiza varijanse jednog faktora varijabiliteta

Formulisanje hipoteza:

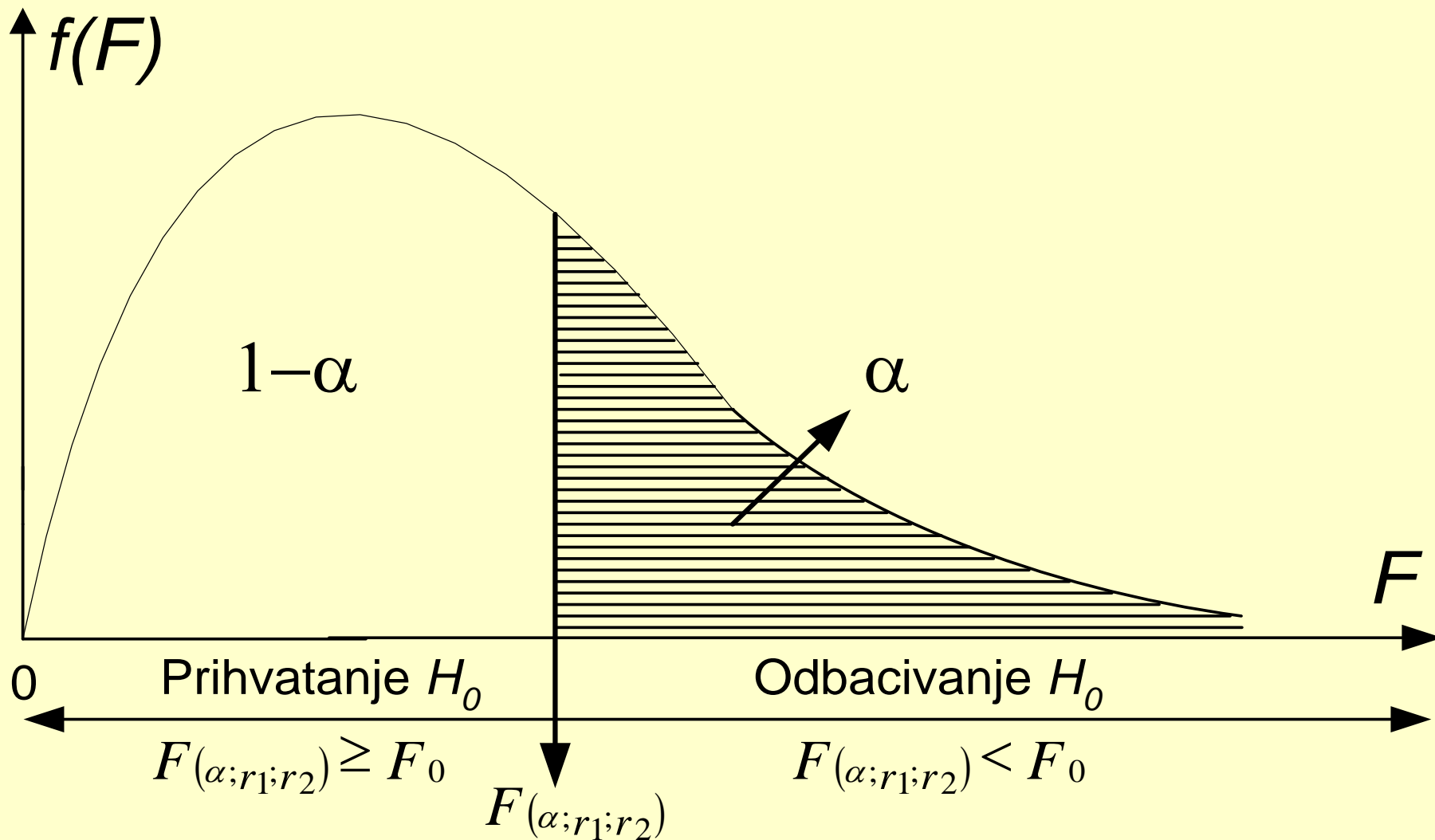
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_m = \mu,$$

$H_1$ : Aritmetičke sredine bar dva podskupa se među sobom razlikuju.

Tabela za analizu varijanse:

Suma kvadrata odstupanja	Broj stepeni slobode	Ocena varijanse	Odnos varijansi	Tablična vrednost
1	2	3	4	5
$S_A$	$r_1 = m - 1$	$V_A$	$F_0$	$F(\alpha; r_1; r_2)$ ili $F(\alpha; r_2; r_1)$
$S_R$	$r_2 = n - m$	$V_R$	-	
$S_T$	$r = n - 1$	$V_T$	-	

Grafički prikaz (Snedekorov  $F$ -raspored):



Oblasti prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze  $H_0$

## Testiranje kod analize varijanse jednog faktora varijabiliteta

Radi se samo ako je  $H_0$  odbačena!

Tri testa:

- $t$ -test,
- testiranje najmanje značajne razlike ( $NZR$ ),
- Takijev test (Tukey).

## Test najmanje značajne razlike:

$$NZR = t_{(\alpha, r_2)} S(\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1})$$

$|\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}| < NZR;$       Razlika nije statistički značajna.

$|\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}| \geq NZR;$       Razlika je statistički značajna.

Statistički značajna razlika  $\alpha=5\%$  (\*).

Visoko statistički značajna razlika  $\alpha=1\%$  (\*\*).

**SOT-232 ANOVA – jedan faktor varijabiliteta**

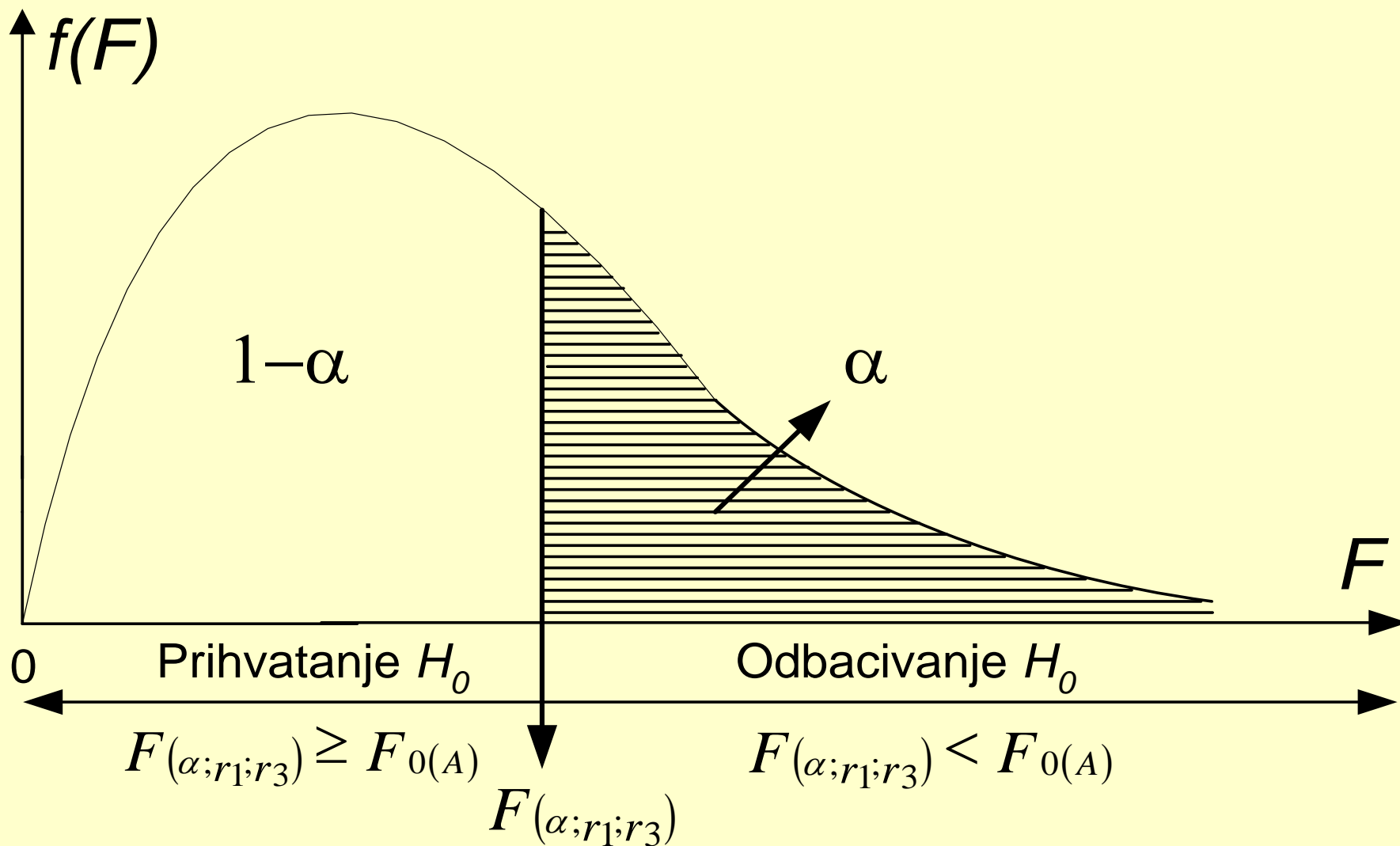
**SOT-013 K:4-13 ANOVA jednog faktora varijabiliteta  
(bez proizvoljne a.s.)**

# Analiza varijanse dva faktora varijabiliteta

Tabela za analizu varijanse:

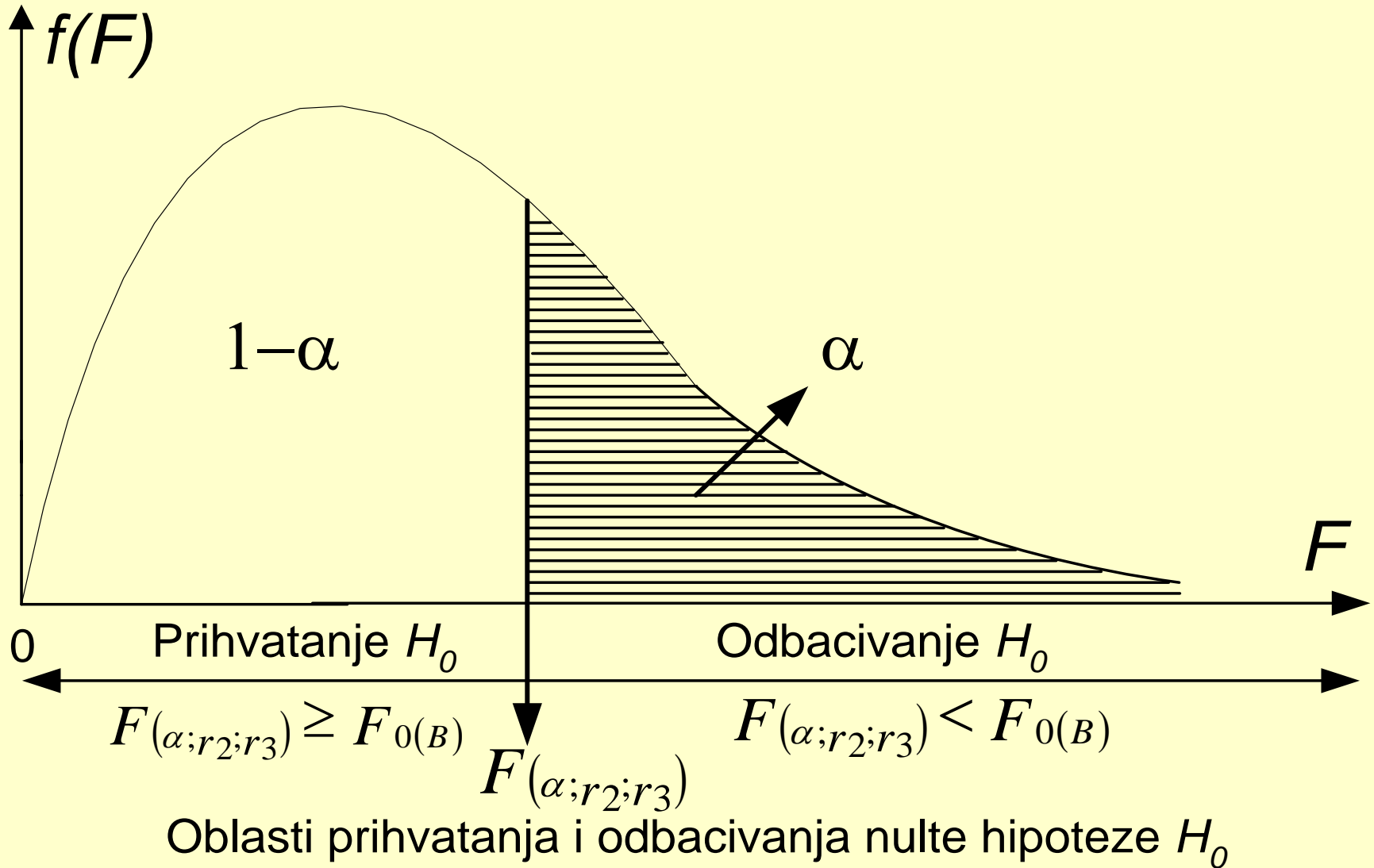
Suma kvadrata odstupanja	Broj stepeni slobode	Ocena varijanse	Odnos varijansi	Tablična vrednost
1	2	3	4	5
$S_A$	$r_1=m-1$	$V_A$	$F_{0(A)}$	$F(\alpha; r_1; r_2)$
$S_B$	$r_3=s-1$	$V_B$	$F_{0(B)}$	$F(\alpha; r_1; r_2)$
$S_R$	$r_2=(m-1)(s-1)$	$V_R$	-	-
$S_T$	$r=n-1$	$V_T$	-	-

## Grafički prikaz za faktor A:



Oblasti prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze  $H_0$

## Grafički prikaz za faktor B:



## Testiranje kod analize varijanse dva faktora varijabiliteta

Radi se samo ako je  $H_0$  odbačena za neki od faktora!

Tri testa:

- $t$ -test,
- testiranje najmanje značajne razlike ( $NZR$ ),
- Takijev test (Tukey).

Na isti način kao i za jedan faktor varijabiliteta!



Izračunavanje relativnog uticaja faktora:

Samo u slučaju ako je nulta hipoteza  $H_0$  odbačena za oba faktora!

$$R_A = \frac{S_A - (m - 1)V_R}{S_T - V_R} \qquad R_B = \frac{S_B - (s - 1)V_R}{S_T - V_R}$$

**SOT-208**

**ANOVA dva faktora varijabiliteta**

**SOT-074 K:4-14**

**ANOVA dva faktora varijabiliteta**

**SOT-054; K(05)z 4-7 Test. n.o. normalnog rasporeda**

**SOT-058; K(05)z 4-8 Testiranje proporcije**

**SOT-029; K(05)z 4-9 Test. razlike a.s. – veliki uzorci**

**SOT-066; K(05)z 4-10 Test. razlike proporcija dva skupa**

**SOT-050; K(05)z 4-11 Test. n.o. t-rasporeda**

**SOT-031; K(05)z 4-12 Test. razlike a.s. – mali uzorci**

**SOT-069; K(05)z 4-13 ANOVA 1 faktora var.**

**SOT-072; K(05)z 4-14 ANOVA 2 faktora var.**